Les Mathématiques en Quatrième

I) Le théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore :

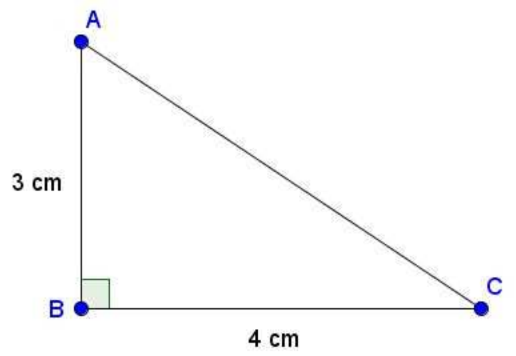
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple :

Le triangle ABC est rectangle en B. On peut appliquer le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = 3^2 + 4^2$
$AC^2 = 9 + 16$
$AC^2 = 25$
$AC = \sqrt{25}$
$AC = 5$

[AC] mesure 5 cm.



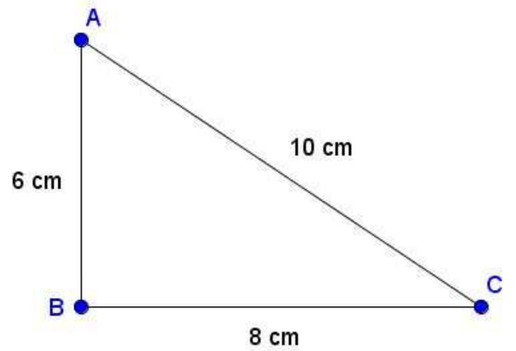
II) La réciproque du théorème de Pythagore

Réciproque du théorème de Pythagore :

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, **alors** ce triangle est **rectangle**.

Exemple :

Dans le triangle ABC , [AC] est le côté le plus long.



D'une part ,

$AC^2 = 10^2 = 100$

D'autre part ,

$AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

Donc on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle ABC est rectangle en B**.

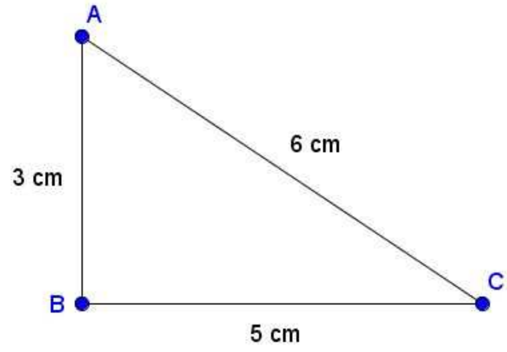
III) La contraposée du théorème de Pythagore

Contraposée du théorème de Pythagore :

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, **alors** ce triangle n'est pas rectangle.

Exemple :

Dans le triangle ABC , [AC] est le côté le plus long.



D'une part ,

$AC^2 = 6^2 = 36$

D'autre part ,

$AB^2 + BC^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

Donc on a : $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$

Donc d'après la **contraposée** du théorème de Pythagore, **le triangle ABC n'est pas rectangle en B**.

IV) Translations et rotations

Transformer une figure par **rotation** , c'est la faire tourner autour d'un point.

Une rotation est définie par :
- un centre ;
- un angle de rotation ;
- un sens de rotation (horaire ou anti-horaire) ;

Transformer une figure par **translation**, c'est la faire glisser sans la tourner.

Une translation est définie par :
- une direction ;
- un sens ;
- une longueur ;

  Sur une figure, on peut schématiser ce glissement par une **flèche**.

V) Triangles semblables et les angles

Définition :

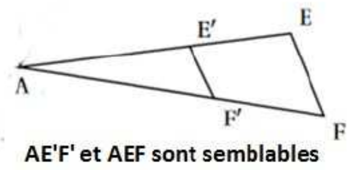
On dit que deux triangles sont semblables lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

VI) Triangles semblables et les longueurs

Propriété :

Si **les longueurs** des côtés de deux triangles sont **proportionnelles** alors ces triangles sont **semblables**.

Méthode :
Pour montrer que deux triangles sont semblables on peut comparer les trois rapports. (Réaliser et comparer les produits croisés). Deux rapports égaux ne suffit pas, il faut vérifier que les trois rapports sont égaux.



AC = 1,4 km
AD = 1,75 km
AE' = 0,5 km
AE = 1,3 km
AF = 1,6 km
E'F' = 1,4 km

Déterminons EF.

Les triangles sont semblables. Or si deux triangles sont semblables alors les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles. On a donc :

Méthode 1 : Avec les quotients

$$\frac{AE'}{AE} = \frac{AF'}{AF} = \frac{E'F'}{EF}$$

$$\frac{0.5}{1.3} = \frac{AF'}{1.6} = \frac{1.4}{EF}$$

On extrait : $\frac{0.5}{1.3} = \frac{1.4}{EF}$

EF = $\frac{1.4 \times 1.3}{0.5} = 3.64$

[EF] mesure 3.64 m.

Méthode 2 : Avec un tableau

Triangle AE'F'	AE'	AE	E'F'
Triangle AEF	AF'	AF	EF

Triangle AE'F'	0.5	AE	1.4
Triangle AEF	1.3	1.6	EF

On en déduit que :

EF = $\frac{1.4 \times 1.3}{0.5} = 3.64$

[EF] mesure 3.64 m.

VII) Calcul littéral

Définition :

Soit a, b , c , d et k des nombres relatifs avec k ≠ 0.

Distributivité simple : $k(a+b) = k \times a + k \times b$

Factorisation : $k \times a + k \times b = k(a+b)$

Double distributivité :
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

L'opposé d'une somme de termes est égale à la somme des opposés de chaque terme

Exemples :

$4(2x+6) = 4 \times 2x + 4 \times 6 = 8x + 24$

$4(3x-5) = 4 \times 3x + 4 \times (-5) = 12x + -20$

$12x + 6 = \mathbf{6} \times 2x + \mathbf{6} \times 1 = \mathbf{6}(2x+1)$

$$\begin{aligned}(x+2)(4x-3) &= x \times 4x + x \times (-3) + 2 \times 4x + 2 \times (-3)\\ &= 4x^2 + -3x + 8x + -6\\ &= 4x^2 + 5x + -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2x+5) - (6x-8) &= 2x + 5 + (-6x) + 8\\ &= -4x + 13\end{aligned}$$

Remarque : Pas de double distributivité

Exemple d'application :

- Choisir un nombre
- Ajouter 3
- Multiplier par 5
- Soustraire 15

Démontrons qu'il suffit de multiplier par 5, le nombre choisi au départ pour obtenir le résultat avec le programme ci dessus.

Pour cela , il faut choisir un nombre indéterminé comme nombre de départ désigné par une lettre.
(Nous choisissons par défaut x.)

Ainsi on obtient :

- Choisir un nombre : x
- Ajouter 3 : $x+3$ (et non $3x$)
- Multiplier par 5 : $5(x+3)$ (attention parenthèses)
- Soustraire 15 : $5(x+3)-15$

Développons et réduisons l'expression $5(x+3)-15$:

$5(x+3)-15$
$= 5 \times x + 5 \times 3 - 15$
$= 5x + 15 - 15$
$= 5x$

Conclusion : Il suffit de multiplier par 5, le nombre choisi au départ pour obtenir le résultat avec le programme.

VIII) Statistiques

Le tableau donne la répartition des notes obtenues à un contrôle de mathématiques par les 30 élèves d'une classe de 3^e

Note	6	8	10	13	14	17	Total
Effectif	2	4	6	3	8	7	30

Moyenne :

$$M = \frac{6 \times 2 + 8 \times 4 + 10 \times 6 + 13 \times 3 + 14 \times 8 + 17 \times 7}{30} = \frac{374}{30} \approx 12.5$$

Médiane :

L'effectif total est de 30.

Dessin :

La 15^e valeur est 13 (car 2 + 4 + 6 + 3 = 15). La 16^e valeur est 14 (car 2 + 4 + 6 + 3 + 8 = 23 > 16)

$Me = \frac{13+14}{2} = 13.5$. La médiane est 13.5 .

Interprétation :
Au moins 50 % des notes sont inférieures ou égales à 13.5 .
Au moins 50 % des notes sont supérieures ou égales à 13.5 .

Remarque : Lorsque l'effectif total est impair , la médiane est la valeur centrale.

L'étendue :

Etendue = Plus grande valeur de la série - Plus petite valeur de la série : 17 - 6 = 11. L'étendue des notes est de 11.

Remarque : Ne jamais prendre les effectifs.

Fréquence :

Déterminons la fréquence des élèves qui ont eu 17/20.

Rappel : fréquence $= \frac{effectif \quad de \quad la \quad donnée}{effectif \quad total} = \frac{7}{30} \approx 0.23$ soit environ 23 % .

IX) Puissances

n est supérieur ou égal à 2, a est un entier relatif.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n\,facteurs}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n\,facteurs}} \text{ (a} \neq 0)$$

Exemples :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$

Préfixe	Giga	Méga	Kilo	Unité	Milli	Micro	Nano
Symbole	G	M	k		m	μ	n
10^n	10^9	10^6	10^3	$10^0 = 1$	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

X) Vitesse

$vitesse = \frac{distance}{temps}$

$v = \frac{d}{t}$

$distance = vitesse \times temps$

$d = v \times t$

$temps = \frac{distance}{vitesse}$

$t = \frac{d}{v}$

XI) Pourcentages

Propriété :

Calculer p % d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{p}{100}$.

Pour calculer un pourcentage, on peut exprimer une proportion de dénominateur 100 ou utiliser un tableau de proportionnalité.

Augmenter une grandeur de **p** % revient à multiplier cette grandeur par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Diminuer une grandeur de **p** % revient à multiplier cette grandeur par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Un pull de 90 €bénéficie d'une réduction de 20 % . Quel est le montant de la remise ?

Résolution : 90 €$\times \frac{20}{100} = 18$ €.

Un pull de 60 €bénéficie d'une réduction de 30 % . Quel est le nouveau prix du pull ?

Résolution : 60 €$\times (1 - \frac{30}{100}) = 60 \times 0.7 = 42$ €.

Un pull de 60 €bénéficie d'une augmentation de 20 % . Quel est le nouveau prix du pull ?

Résolution : 60 €$\times (1 + \frac{20}{100}) = 60 \times 1.2 = 72$ €.

XII) Équations

Définition :

Une équation est une **égalité** qui comporte au moins un nombre de valeur **inconnue**, généralement désigné par une lettre. Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle **l'égalité est vraie**.

Résoudre une équation, c'est en **trouver** toutes les **solutions**.

Méthode 1 : Prouver qu'un nombre est solution ou non.

On considère l'équation : $3x + 1 = 2x + 3$.

2 est il solution de l'équation ?

On remplace x par 2 dans le membre de gauche,

$3 \times 2 + 1$
$6 + 1$
7

On remplace x par 2 dans le membre de droite,

$2 \times 2 + 3$
$4 + 3$
7

On obtient le même résultat dans les deux membres. Donc 2 est solution de l'équation $3x + 1 = 2x + 3$.

Méthode 2 : Résoudre une équation.

On considère l'équation $6x - 9 = 8x + 1$

Phase 1 : On trie les termes.

$6x - 9 = 8x + 1$

On trie les termes en x, on soustrait $8x$ de part et d'autre.

$6x - 9 - 8x = 8x + 1 - 8x$
$-2x - 9 = 1$

On trie les nombres , on ajoute 9 de part et d'autre.

$-2x - 9 + 9 = 1 + 9$
$-2x = 10$

Phase 2 : On détermine la valeur de x

$-2x = 10$

On divise par -2 de part et d'autre.

$\frac{-2x}{-2} = \frac{10}{-2}$

$x = \frac{10}{-2} = -5$

La solution de l'équation est -5 .

XII) Règles de calculs avec les fractions

Soient a, b , c et d des nombres relatifs. (b, c et d $\neq 0$).

Addition :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}$$

Soustraction :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}$$

Multiplication :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5 \times 2}{3 \times 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Division :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{7}} = \frac{5}{6} \times \frac{7}{2} = \frac{5 \times 7}{6 \times 2} = \frac{35}{12}$$

XIII) Triangles égaux

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils possèdent :
→ trois côtés deux à deux de même mesure.
→ une longueur comprise entre deux angles deux à deux de même mesure.
→ un angles adjacent à deux côtés deux à deux de même longueur.

XIV) Repérage sur une sphère

Définitions :

Si l'on assimile la Terre à une sphère, on peut repérer un point M à sa surface par deux coordonnées correspondant à des mesures d'angles : sa **latitude** et sa **longitude**.
Pour cela, on utilise des parallèles (cercles dont les points ont même latitude) et des méridiens (demi-cercle dont les points ont même longitude).

La latitude exprime la position Nord-Sud par rapport à l'équateur.
La longitude exprime la position Est-Ouest par rapport au méridien de Greenwich.