Séquence 1 : Équations, fonctions polynômes du second degré

I) Fonctions polynômes du second degré

1) Premières définitions

Définitions :

- On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression algébrique de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
- On dit que f est donné sous forme développée.
- Les réels a, b et c sont appelés coefficients de la fonction polynôme.

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré.

Exemple :
$f(x) = 8x^2 + 7x - 10$ La fonction f est une fonction polynôme du second degré où $a = 8$, $b = 7$ et $c = -10$
$g(x) = 6x + 7$ La fonction g n'est pas une fonction polynôme du second degré mais une fonction affine.

2) Forme canonique

Propriété :
Toute fonction polynôme f de degré 2 de forme développée $ax^2 + bx + c$ admet une écriture de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Cette écriture est la forme canonique de la fonction polynôme.

Démonstration :

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Étape 1 : On factorise par a

Pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$

Étape 2 : Complétion du carré

$x^2 + \dfrac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

En effet :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Donc $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$

Étape 3 : Substitution dans l'expression de $f(x)$.

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Étape 4 : Mise au même dénominateur.

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Étape 5 : On développe.

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a \times \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \times \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$f(x) = a \times \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a \times \left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Étape 6 : Conclusion.

En posant $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = f(\alpha)$.

On obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 24x + 41$. Déterminer la forme canonique de f.

Méthode 1 :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{24}{2 \times 4} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\begin{aligned}\beta = f(\alpha) = f(3) &= 4 \times 3^2 - 24 \times 3 + 41 \\ &= 36 - 72 + 41 \\ &= 5\end{aligned}$$

Méthode 2 : Complétion du carré

$f(x) = 4x^2 - 24x + 41$

$f(x) = 4(x^2 - 6x) + 41$

$f(x) = 4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 41$

$f(x) = 4[(x-3)^2 - 9] + 41$

$f(x) = 4(x-3)^2 + 4 \times (-9) + 41$

$f(x) = 4(x-3)^2 - 36 + 41$

$f(x) = 4(x-3)^2 + 5$

La forme canonique de f est donc : $f(x) = 4(x-3)^2 + 5$

3) Variations et représentation graphique

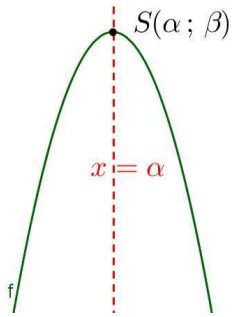
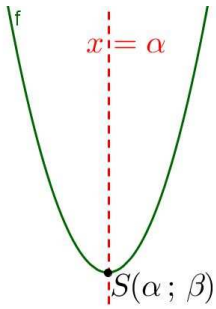
Propriété admise :
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

- Dans un repère du plan, la représentation graphique de la fonction f est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$.
- Cette parabole admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = \alpha$.

Propriété admise :
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

- Si a est positif alors :
  f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.
  f admet un minimum égal à β atteint en $x = \alpha$.
- Si a est négatif alors :
  f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.
  f admet un maximum égal à β atteint en $x = \alpha$.

Illustration des propriétés :

$a < 0$	$a > 0$
x : $-\infty$ — $\alpha = \frac{-b}{2a}$ — $+\infty$ Variation de f : ↗ $f(\alpha) = \beta$ ↘	x : $-\infty$ — $\alpha = \frac{-b}{2a}$ — $+\infty$ Variation de f : ↘ $f(\alpha) = \beta$ ↗
 La parabole est tournée "vers le bas"	 La parabole est tournée "vers le haut"

II) Équations du second degré

1) Vocabulaire

Définitions :

- Une équation du second degré à coefficients réels est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
- Une solution de cette équation est appelée une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Définition :
Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Il est noté Δ.

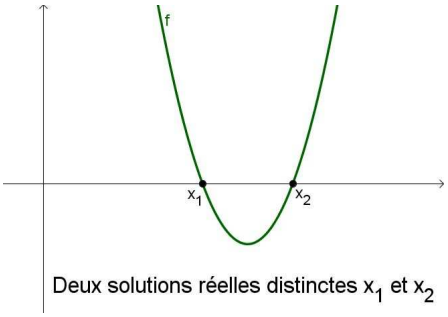
Exemple :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 + 8x - 1$. Déterminer le discriminant de f.

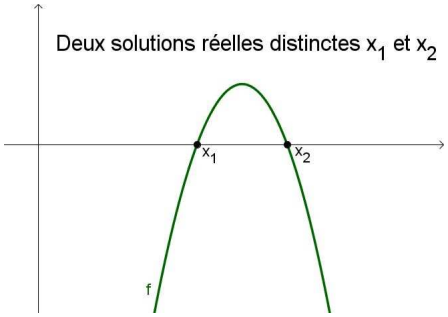
Ici, $a = 9$, $b = 8$ et $c = -1$. $\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4 \times 9 \times (-1) = 64 + 36 = 100$. Le discriminant est égal à 100.

2) Résolution d'équations et lien coefficients - racines

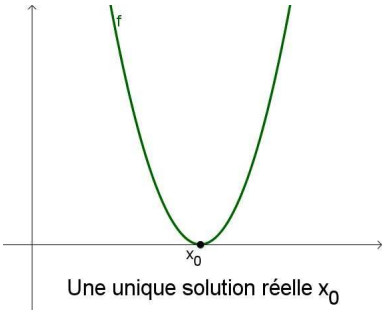
Propriété :
Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

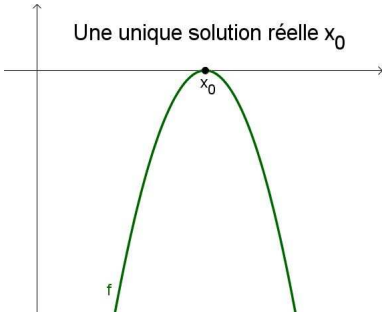
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



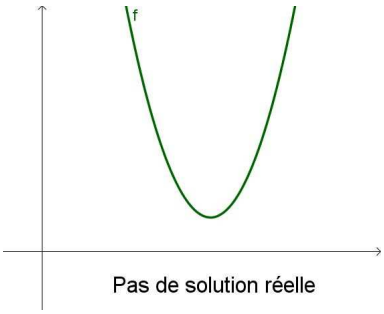


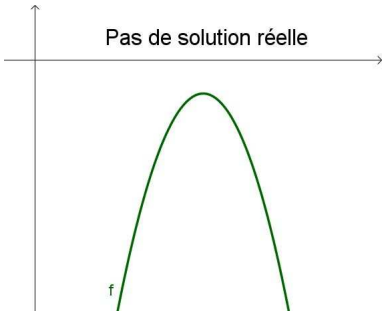
Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$





Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.





Démonstration :

Posons $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. D'après la démonstration de la forme canonique, on a vu que $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Étape 1 : Transformations d'écriture

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\Leftrightarrow a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \end{aligned}$$

Étape 2 : Disjonction des cas

- Factorisation pour $\Delta \geqslant 0$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Soit :

$$x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soit :

$$x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$:
  L'équation a donc deux solutions distinctes :
  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$:
  L'équation a une unique solution :
  $$x_0 = \frac{-b}{2a}$$
- Si $\Delta < 0$:
  $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$
  $$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$
  $$\frac{\Delta}{4a^2} < 0$$
  Or le carré d'un nombre réel est toujours positif.
  L'équation n'a donc pas de solution réelle.

Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 3x - 6 = 0$.

Étape 1 : Détermination du discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 9 + 72 = 81 > 0$. $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

Étape 2 : Résolution de l'équation :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{3 - 9}{6} = \frac{-6}{6} = -1$ $\quad$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{3 + 9}{6} = \frac{12}{6} = 3$

Les solutions de l'équation sont -1 et 3.

Propriété :
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le discriminant est strictement positif. f a alors deux racines distinctes x_1 et x_2.
La somme S et le produit P des racines sont donnés par :

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration laissée en exercice.

Exemple :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x - 2$ admet pour racine évidente $x_1 = 1$.
Déterminer la valeur de x_2 , la seconde racine.

On a $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3}$.

De plus, $P = x_1 \times x_2 = 1 \times x_2 = x_2$.

On en déduit donc que $x_2 = \frac{-2}{3}$.

3) Forme factorisée

Propriété :
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta > 0$ alors pour tout nombre réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f.
- Si $\Delta = 0$ alors pour tout nombre réel x, $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de f.

On dit que f est donnée sous forme factorisée.

Démonstration :

- Si $\Delta > 0$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$
$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$
$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$
$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$f(x) = a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$f(x) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

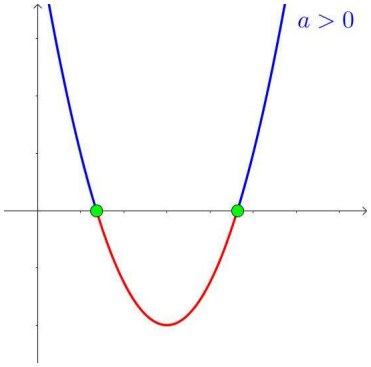
$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$$
$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

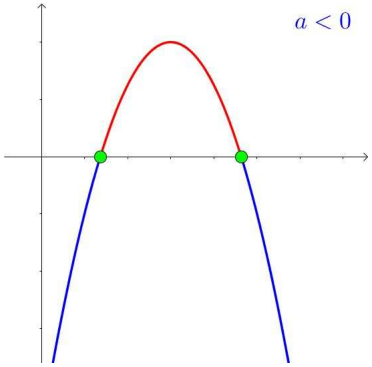
Exemple :
Soit f le polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$.
D'après un exemple précédent, les racines de ce polynôme sont -1 et 3.
On peut donc factoriser le polynôme f :
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
$f(x) = 3(x - (-1))(x - 3)$
$f(x) = 3(x + 1)(x - 3)$

III) Signe d'un polynôme du second degré

$\Delta > 0$

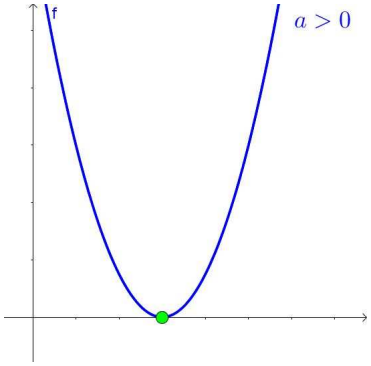
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

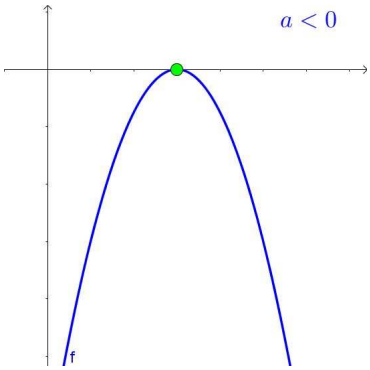




$\Delta = 0$

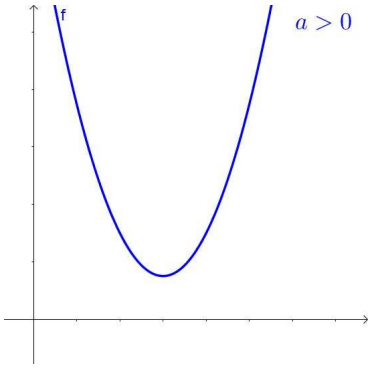
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de a	

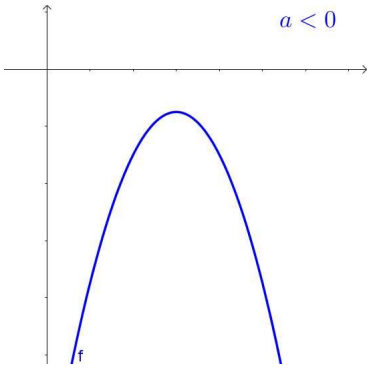




$\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de a	





Exemple : Soit f le polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5(x-3)(x+7)$. Résoudre $f(x) < 0$

Les racines de ce polynôme sont 3 et -7. Ici $a = 5 > 0$.

x	$-\infty$		-7		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{S} =]-7\,;3[$