Séquence 3 : Dérivation (Point de vue local)

I) Taux de variation et nombre dérivé d'une fonction en un point.

1) Taux de variation

Définition :
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels distincts appartenant à I.

On appelle taux de variation (ou taux d'accroissement) de f entre a et b , le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

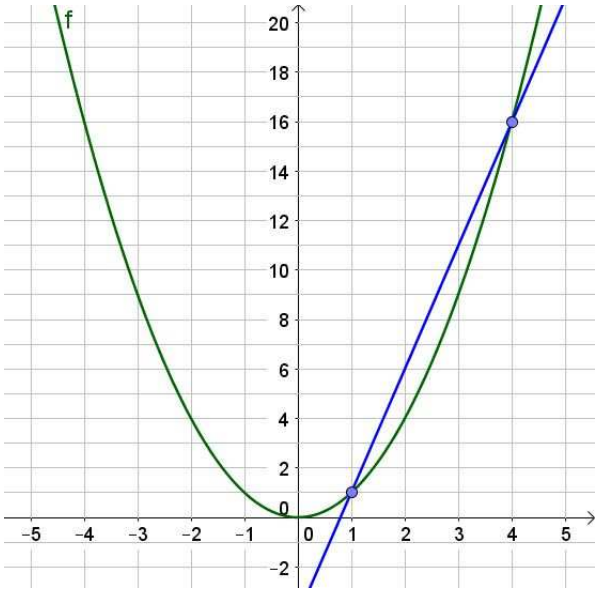
Remarque : On considère, dans un repère du plan $A(a, f(a))$ et $B(b; f(b))$ de la courbe représentative de f.
Le taux de variation de f entre a et b est le coefficient directeur de la droite (AB).

Exemple 1 :
On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$.
Déterminer le taux de variations entre 1 et 4.

$f(1) = 1^2 = 1$ $\qquad$ $f(4) = 4^2 = 16$

Le taux de variation entre 1 et 4 est :

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{16-1}{4-1} = \frac{15}{3} = 5$$

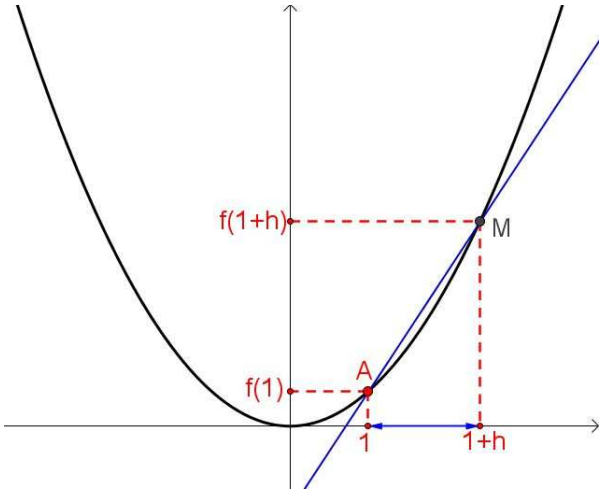


Exemple 2 :
On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$.
Déterminer le taux de variation entre 1 et $1+h$
(avec $h \neq 0$).

$f(1+h) = (1+h)^2$ $\qquad$ $f(1) = 1^2 = 1$
$f(1+h) = 1+2h+h^2$

Le taux de variation entre 1 et $1+h$ est :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{1+2h+h^2-1}{1+h-1} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$$



2) Notion de nombre dérivé

Définition :
On considère une fonction f définie sur un intervalle I. Soient a un nombre réel de l'intervalle I et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque le taux de variation de f entre a et $a+h$ noté $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite un nombre réel L lorsque h tend vers 0.

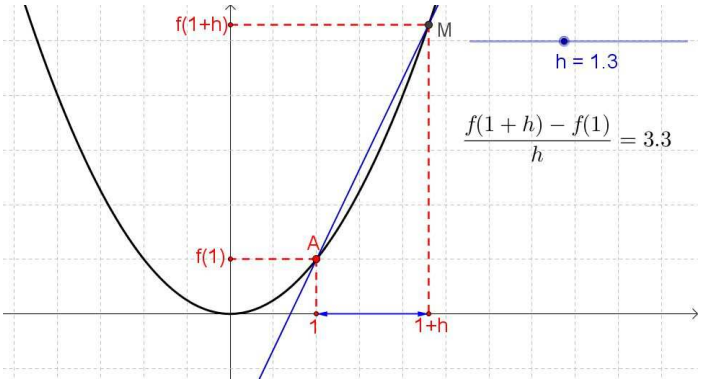
Ce nombre réel L lorsqu'il existe, est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$

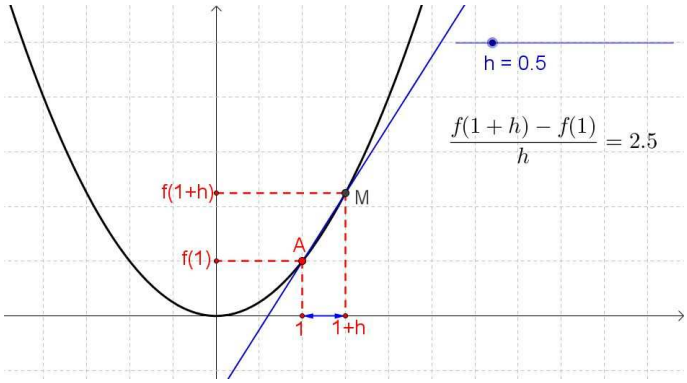
Exemple : Reprenons l'exemple précédent en considérant la fonction f définie par $f(x) = x^2$.
Déterminons $f'(1)$.

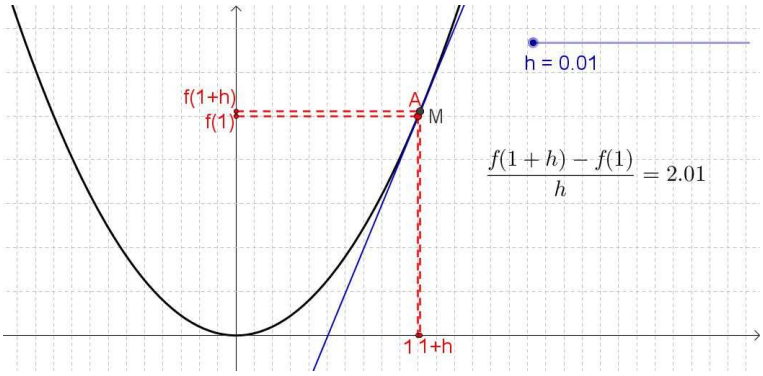
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} 2+h = 2$$

Ainsi la fonction carré est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$

Illustration :







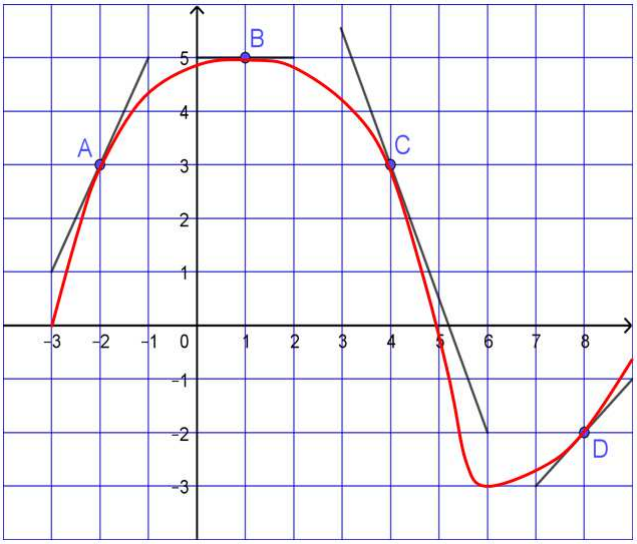
II) Tangente à une courbe en un point

1) Notion de tangente

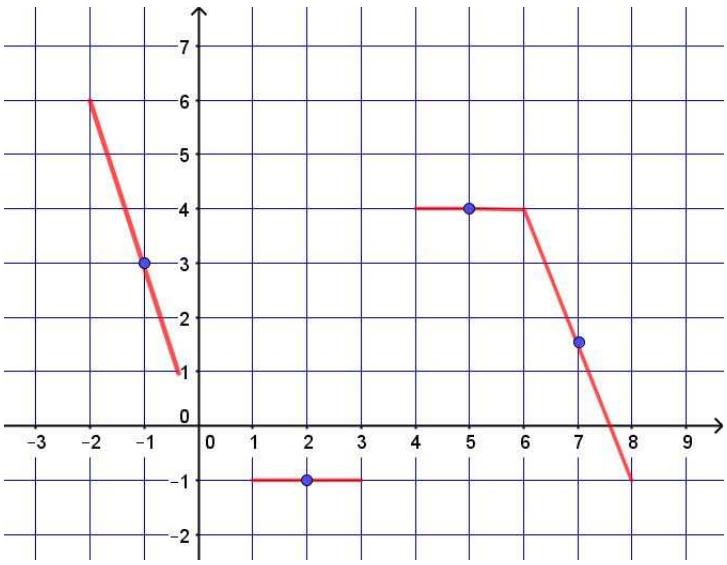
Définition :
Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $A(a; f(a))$.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par A

Exemple 1 :
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ;9].
On a représenté les tangentes à sa courbe aux points A, B, C, D d'abscisses respectives -2, 1, 4 et 8.

1) Déterminer $f(-2)$, $f(1)$, $f(4)$, $f(8)$.
2) Déterminer $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(8)$.



Exemple 2 :
On a représenté les tangentes d'une courbe représentative d'une fonction f en -1, 2, 5 et 7 .
Tracer l'allure possible de la courbe représentative de f.



2) Équation réduite de la tangente

Propriété :
Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $A(a; f(a))$
La tangente à la courbe représentative de f au point A a pour équation réduite $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Démonstration :
La tangente en A à la courbe au point d'abscisse a admet une équation de la forme $y = mx + p$.

Étape 1 :
Par définition, $m = f'(a)$. Ainsi l'équation réduite de la tangente T est $y = f'(a)x + p$.

Étape 2 :
De plus la tangente T passe par le point $A(a; f(a))$ donc ses coordonnées vérifient l'équation précédente.
On obtient :
$f(a) = f'(a) \times a + p$.
On en déduit que $p = f(a) - f'(a) \times a$.

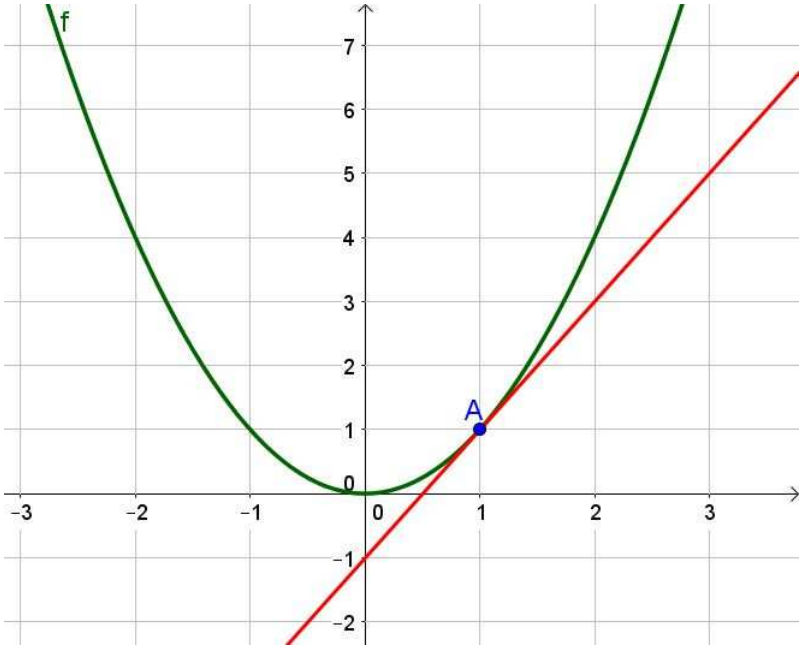
Étape 3 :
L'équation réduite de la tangente s'écrit alors :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$
c'est à dire :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exemple : f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $f(x) = x^2$ et $f'(1) = 2$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.

Résolution par le calcul :

On sait que $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$
On a donc :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$y = 2(x-1) + 1$
$y = 2x - 2 + 1$
$y = 2x - 1$

Résolution graphique :