Séquence 4 : Calcul vectoriel et produit scalaire

I) Première définition du produit scalaire

Définition :
Soit $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Définition :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$; est le nombre réel défini par :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}, \vec{v})$

Remarque :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$

Exemple :
Soient A, B et C trois points tels que : $AB = 6$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times cos(\widehat{BAC}) \\ &= 6 \times 4 \times cos(60°) \\ &= 6 \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 12\end{aligned}$$

Conséquences :
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

II) Propriétés

Propriété (de symétrie) :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Propriété (de bilinéarité) :
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel.

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

III) Produit scalaire et norme

Définition :
On appelle carré scalaire de $\vec{u}$ le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même. On le note $\vec{u}^2$.
Ainsi on a, $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Propriétés admises :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ Autrement dit : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ Autrement dit : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ Autrement dit : $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Propriétés admises :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Propriété admise :
Soient A , B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Exemple :
Soit ABC un triangle tel que : $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 8$. Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) \\
&= \frac{1}{2} \times (6^2 + 4^2 - 8^2) \\
&= \frac{1}{2} \times (36 + 16 - 64) \\
&= \frac{1}{2} \times (-12) = -6
\end{aligned}$$

IV) Produit scalaire et orthogonalité

Propriété admise :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

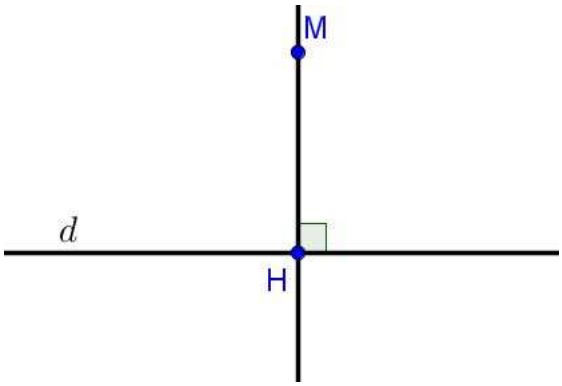
Remarque :
Par convention le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur.

Exemple :
Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\\ &= \frac{1}{2} \times (3^2 + 4^2 - 5^2)\\ &= \frac{1}{2} \times (9 + 16 - 25)\\ &= 0\end{aligned}$$

On peut en déduire que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
Donc le triangle ABC est rectangle en B

Définition :
Soit une droite d et un point M du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.



Propriété admise :
Soient A, B et C trois points du plan (A et B distincts).
Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

V) Produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété admise :

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\times x' + y\times y'$$

Exemple :

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times 2 + 7\times 3 = 10 + 21 = 31$.

Propriétés admises :

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs .

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $x\times x' + y\times y' = 0$.
- $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

Exemple :

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2. Déterminer $\|\vec{u}\|$.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\times 3 + (-6)\times 2 = 12 + (-12) = 0$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. $\|\vec{u}\|^2 = 4^2 + (-6)^2 = 16 + 36 = 52$.

Donc, $\|\vec{u}\| = \sqrt{52}$.