Séquence 5 : Dérivation (point de vue global)

I) Définition de la dérivée d'une fonction

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I lorsque f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I, noté $f'(x)$.
On appelle fonction dérivée de f sur I, notée f', la fonction définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$

II) Fonction dérivée des fonctions de référence

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Fonction constante : $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$ n entier naturel non nul	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Fonction valeur absolue : $f(x) = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Exemple 1 :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 20$. Donner la dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction constante et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :
$f'(x) = 0$.

Exemple 2 :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 6x - 3$. Donner la dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :
$f'(x) = 6$.

Exemple 3 :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4$. Donner la dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale de degré 4 et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :
$f'(x) = 4x^3$.

Démonstrations :

Dans les démonstrations suivantes a et h désignent deux nombres réels avec $h \neq 0$:

1) Dérivée de la fonction carré :

$f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$
$f(a) = a^2$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 2a+h = 2a \qquad \text{Donc } f'(a) = 2a$$

2) Dérivée de la fonction inverse :

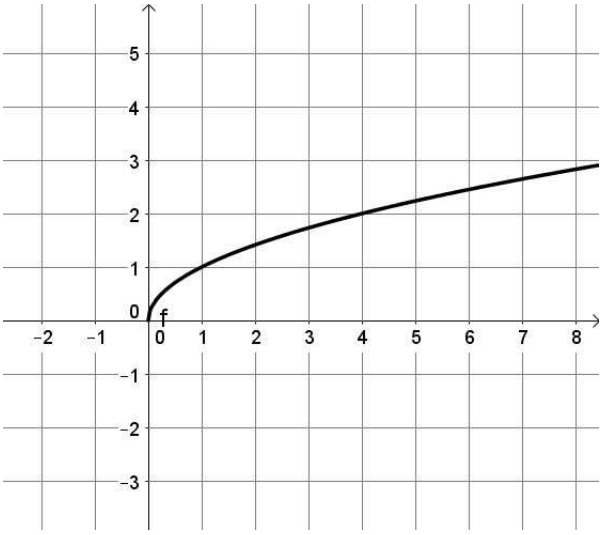
$f(a+h) = \dfrac{1}{a+h}$
$f(a) = \dfrac{1}{a}$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{1\times a}{(a+h)\times a}-\frac{1\times(a+h)}{a\times(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}$$

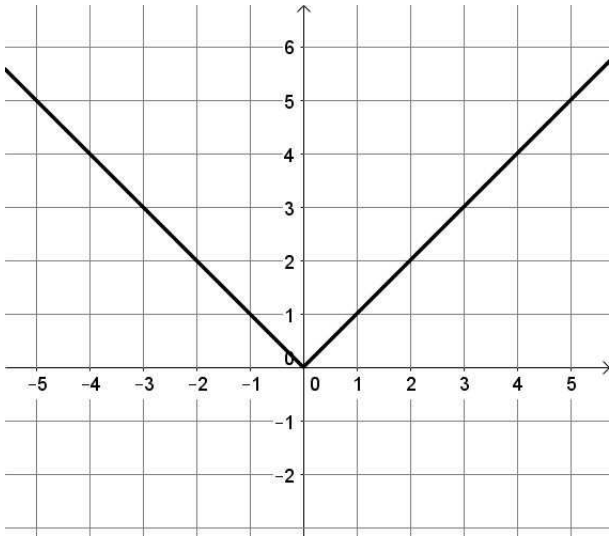
$$= \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-h}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2} \qquad \text{Donc } f'(a) = \frac{-1}{a^2}$$

Remarque importante :
Les fonctions racine carrée et valeur absolue sont définies en 0 mais elles ne sont pas dérivables en 0.



Courbe représentative de la fonction racine carrée



Courbe représentative de la fonction valeur absolue

III) Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opération	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$u+v$	I	I	$u'+v'$
ku avec k réel	I	I	ku'
uv	I	I	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	u ne s'annulant pas sur I	I	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	v ne s'annulant pas sur I	I	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemple 1 :
Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2+3x+1$. Donner la dérivée de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a pour tout réel x on a , $f'(x)=2x+3$.

Exemple 2 :
Soit f la fonction définie par $f(x)=(7x^2+8x-1)(9x+1)$. Donner la dérivée de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$u(x)=7x^2+8x-1$
$u'(x)=14x+8$

$v(x)=9x+1$
$v'(x)=9$

On a donc : $f'(x)=(14x+8)(9x+1)+(7x^2+8x-1)\times 9$

On développe et on réduit :

$f'(x)=126x^2+14x+72x+8+63x^2+72x-9$
$f'(x)=189x^2+158x-1$

Exemple 3 :
Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{5x+1}{x+3}$. Donner la dérivée de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables et pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ on a :

$u(x)=5x+1$
$u'(x)=5$

$v(x)=x+3$
$v'(x)=1$

On a donc : $f'(x)=\frac{5\times(x+3)-(5x+1)\times 1}{(x+3)^2}$

On a : $f'(x) = \dfrac{5 \times (x+3) - (5x+1) \times 1}{(x+3)^2}$

On développe et on réduit le numérateur de l'expression :

$f'(x) = \dfrac{5x+15-(5x+1) \times 1}{(x+3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{5x+15-[(5x+1) \times 1]}{(x+3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{5x+15-[5x+1]}{(x+3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{5x+15-5x-1}{(x+3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{14}{(x+3)^2}$

Démonstration de la dérivée d'un produit :

Soient a et h deux réels avec $h \neq 0$ appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions dérivables sur I, v ne s'annulant pas sur I.

On considère la fonction f définie par $f = u \times v$

$f(a+h) = u(a+h) \times v(a+h)$
$f(a) = u(a) \times v(a)$

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\
&= \frac{v(a+h) \times (u(a+h)-u(a)) + u(a) \times (v(a+h)-v(a))}{h} \\
&= \frac{v(a+h) \times (u(a+h)-u(a))}{h} + \frac{u(a) \times (v(a+h)-v(a))}{h} \\
&= v(a+h) \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}
\end{aligned}$$

On admet que : $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

On en déduit que : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

On peut donc dire que f est dérivable en a et que l'on a : $f'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

On obtient donc : $f' = u'v + uv'$

> Théorème :
> Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.
> Pour tout x réel tel que $mx+p$ appartient à I, la fonction définie par $f(x) = g(mx+p)$ est dérivable et $f'(x) = m \times g'(mx+p)$.

Exemple :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x+8)^4$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$f'(x) = 5 \times 4(5x+8)^3$.