Séquence 6 : Suites numériques (Partie 1)

I) Modes de génération d'une suite

1) Notion de suite numérique

> Définition :
> Une suite numérique est une fonction $u : n \mapsto u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
> Le nombre réel $u(n)$, noté u_n (se lit "u indice n"), est appelé le terme de rang n ou le terme général de la suite. On note cette suite (u_n).

Remarques :

- La suite (u_n) peut être représentée graphiquement par le nuage de point de coordonnées $(n; u_n)$.
- Ne pas confondre le terme général de la suite u_n et la suite (u_n).
- Le premier terme d'une suite (u_n) est généralement u_0 mais il est possible de rencontrer des suites qui commencent à u_1 ou à un indice supérieur.

Exemple :
On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, ...
On note (u_n) cette suite de nombres tel que : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, ...

2) Suite définie par une formule explicite

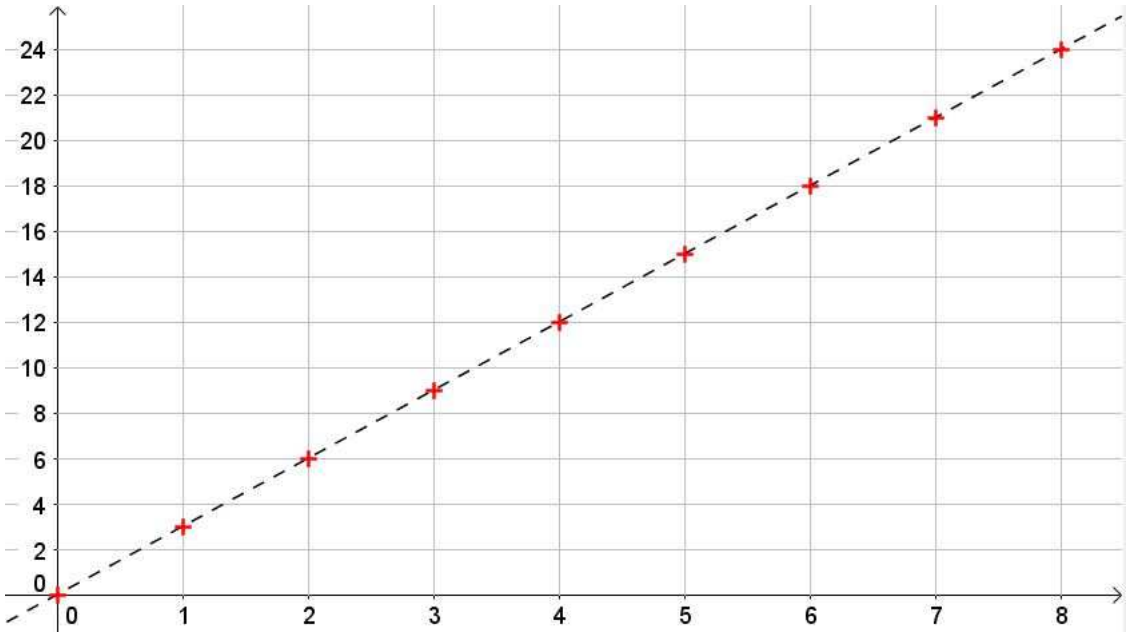
> Définition :
> On définie une suite par une formule explicite lorsque chaque terme de la suite s'exprime à partir de son rang n.

Exemple :

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n$
Ainsi :
$u_0 = 3 \times 0 = 0$
$u_1 = 3 \times 1 = 3$
$u_2 = 3 \times 2 = 6$
$u_{100} = 3 \times 100 = 300$

```python
def suite(n) :
    u = 3*n
    return u
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	0	3	6	9	12	15	18	21	24



3) Suite définie par une relation de récurrence

> Définition :
> On définit une suite par une relation de récurrence lorsque chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un (ou plusieurs) terme qui le précède.

Remarque :
Il ne faut pas confondre u_{n+1} qui désigne le terme de rang $n+1$ et u_n+1 qui désigne le terme u_n auquel on ajoute 1.

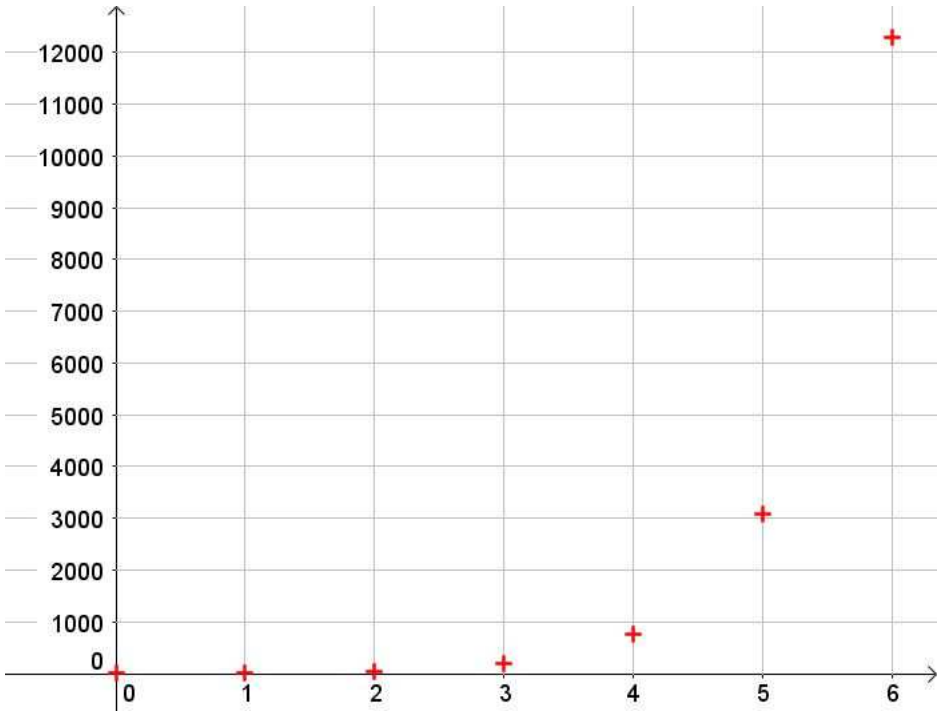
Exemple 1 :

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \end{cases}$

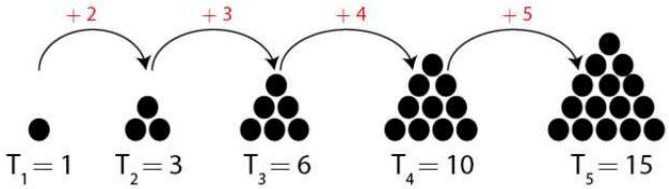
```python
def suiterec(n) :
    u = 2
    for i in range (1 , n + 1 ) :
        u = 4*u + 3
    return u
```

$u_0 = 2$
$u_1 = 4 \times u_0 + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11$
$u_2 = 4 \times u_1 + 3 = 4 \times 11 + 3 = 47$
Pour déterminer u_{100}, il faudrait déterminer
u_0 , u_1 , ... , u_{99}.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	11	47	191	767	3071	12287	49151	196607



Exemple 2 :
On considère la suite (T_n), la suite des nombres triangulaires dont le procédé est illustré ci-dessous :



Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

$T_2 = T_1 + 2$
$T_3 = T_2 + 3$
$T_4 = T_3 + 4$
$T_5 = T_4 + 5$
En poursuivant le procédé, on peut en déduire que :

$$T_{n+1} = T_n + n + 1$$

II) Suites arithmétiques

Définition :
Soit u_0 un réel. Une suite (u_n) de premier terme u_0 est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

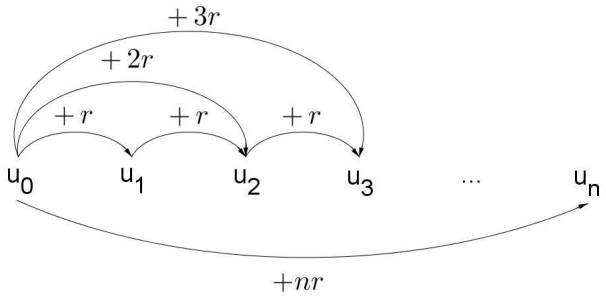
$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$ est une suite arithmétique de raison 5.

Propriété admise :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Illustration :



Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, on a :

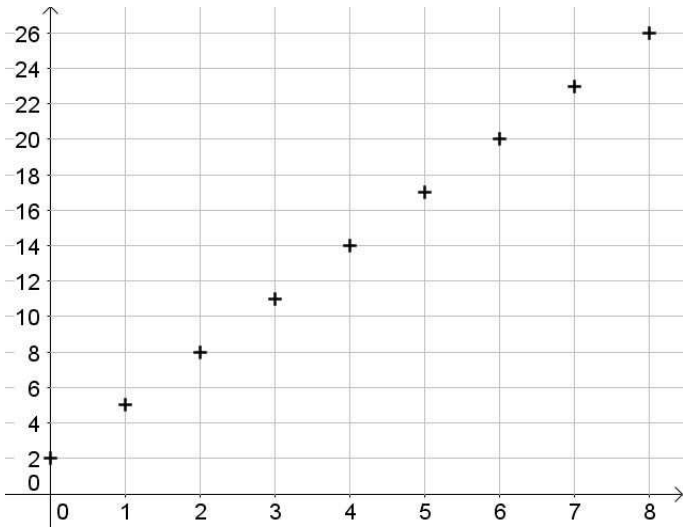
$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. Exprimer u_n en fonction de n.

$u_n = u_0 + nr = 2 + n \times 3 = 2 + 3n$

Représentations de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	5	8	11	14	17	20	23	26




```
1 def suitearith(n) :
2     u = 2 + 3*n
3     return u
```

Remarque :
On dit qu'un phénomène, dont l'évolution est représentée par une suite de nombres, est à croissance linéaire si la suite qui le modélise est une suite arithmétique.

III) Suites géométriques

Définition :
Soit u_0 un réel. Une suite (u_n) de premier terme u_0 est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

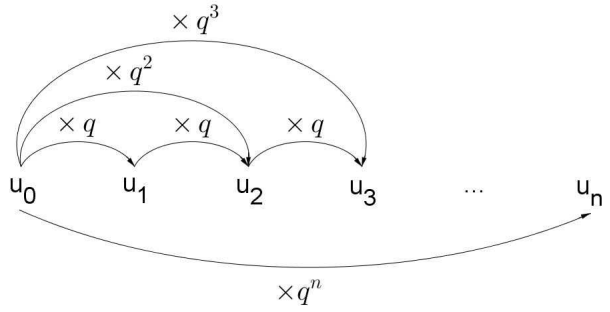
$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -8u_n$ est une suite géométrique de raison -8.

Propriété admise :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Illustration :



Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, on a :

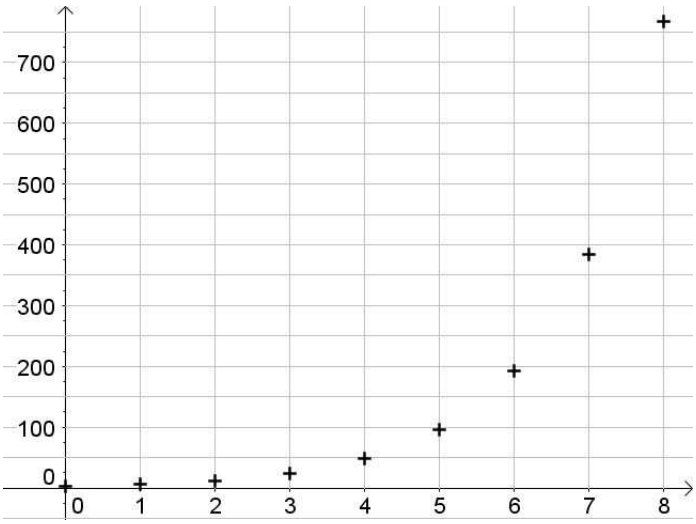
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple :
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Exprimer u_n en fonction de n.

$u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

Représentations de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	3	6	12	24	48	96	192	384	768




```python
def suitegeom(n) :
    u = 3 * 2**n
    return u
```

Remarque :
On dit qu'un phénomène, dont l'évolution est représentée par une suite de nombres, est à croissance exponentielle si la suite qui le modélise est une suite géométrique.