Séquence 8 : Fonction exponentielle

I) Fonction exponentielle

1) Définition

Définition :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On appelle cette fonction la fonction exponentielle et on note exp : $x \mapsto \exp(x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

2) Propriétés

Propriété (admise) :
Pour tous réels x et y on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Propriétés (admises) :
Pour tous réels x et y et tout entier relatif n, on a :

$\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ $\qquad$ $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ $\qquad$ $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Remarques :

- Pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.
- Pour tout réel x , $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

II) Notation e

1) Nouvelle notation

Définition :
L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. Ainsi $\exp(1) = e$.
Le réel e est environ égal à 2.718 à 10^{-3} près, c'est le nombre d'Euler.

Remarque : Pour tout entier naturel n , $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = e^n$

Notation :
On note, pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$

2) Propriétés

Propriétés (admises) :
Soit e un réel strictement positif, pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$e^{x+y} = e^x \times e^y$ $\qquad$ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\qquad$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\qquad$ $e^{nx} = (e^x)^n$

Exemples :

$e^3 \times e^{4.2} = e^{3+4.2} = e^{7.2}$ $\qquad$ $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$ $\qquad$ $\dfrac{e^{8.6}}{e^{5.1}} = e^{8.6-5.1} = e^{3.5}$ $\qquad$ $(e^4)^{-1.1} = e^{4\times(-1.1)} = e^{-4.4}$

3) Lien avec les suites géométriques

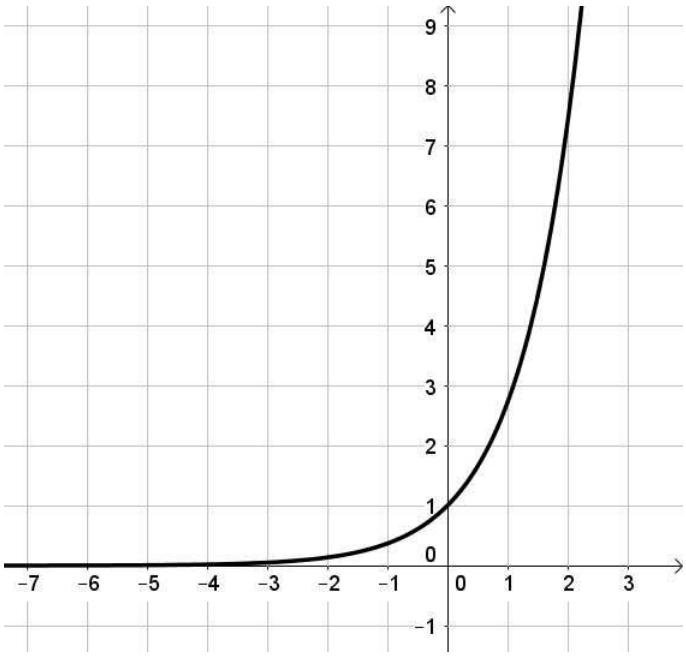
Propriété :
Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{na}$ est une suite géométrique de raison e^a.

Exemples :
La suite (u_n) définie par $u_n = e^{2n}$ est géométrique de raison e^2 et de premier terme 1.
La suite (v_n) définie par $v_n = 4e^{-3n}$ est géométrique de raison e^{-3} et de premier terme 4.

III) Étude de la fonction exponentielle

Propriété :
Pour tout réel x, $e^x > 0$.
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Propriété :
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



Propriétés (admises) :
Pour tous réels x et y :

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $\qquad$ $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

Exemple 1 : Comparer des nombres :

Comparer $e^{1.5}$ et $e^{2.5}$

La fonction exponentielle est strictement croissante donc les images sont rangées dans le même ordre ainsi : $1.5 < 2.5 \Rightarrow e^{1.5} < e^{2.5}$.

Exemple 2 : Résolutions d'équations et d'inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $e^{3x+8} = e^{-7x+11}$

2) $e^{-9x-4} \leqslant e^{-3x+14}$

Résolution :

1) $e^{3x+8} = e^{-7x+11} \Leftrightarrow 3x+8 = -7x+11$

$$\begin{aligned} & 3x+8 = -7x+11 \\ \Leftrightarrow\ & 3x+8+7x = 11 \\ \Leftrightarrow\ & 10x+8 = 11 \\ \Leftrightarrow\ & 10x = 11-8 \\ \Leftrightarrow\ & 10x = 3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{10x}{10} = \frac{3}{10} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{3}{10} = 0.3 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est 0.3 autrement dit
$\mathscr{S} = \{0.3\}$

2) $e^{-9x-4} \leqslant e^{-3x+14} \Leftrightarrow -9x-4 \leqslant -3x+14$
La fonction exponentielle est strictement croissante, on conserve donc le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} & -9x-4 \leqslant -3x+14 \\ \Leftrightarrow\ & -9x-4+3x \leqslant 14 \\ \Leftrightarrow\ & -9x+3x \leqslant 14+4 \\ \Leftrightarrow\ & -6x \leqslant 18 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-6x}{-6} \geqslant \frac{18}{-6} \\ \Leftrightarrow\ & x \geqslant \frac{18}{-6} \\ \Leftrightarrow\ & x \geqslant -3 \end{aligned}$$

$\mathscr{S} = [-3; +\infty[$

IV) Fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}$

1) Dérivabilité

Propriété (admise) :
Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle sur I.
La fonction définie sur I par $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable et pour tout réel $x \in I$ on a : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Conséquence (admise) :
Soit k un nombre réel.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = ke^{kx}$.

Exemples :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x}$. Déterminer la dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f'(x) = 4e^{4x}$.

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{3x+7}$. Déterminer la dérivée de g.

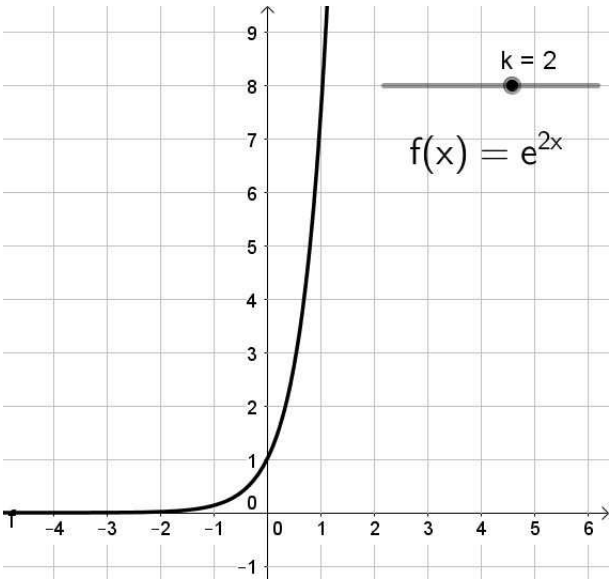
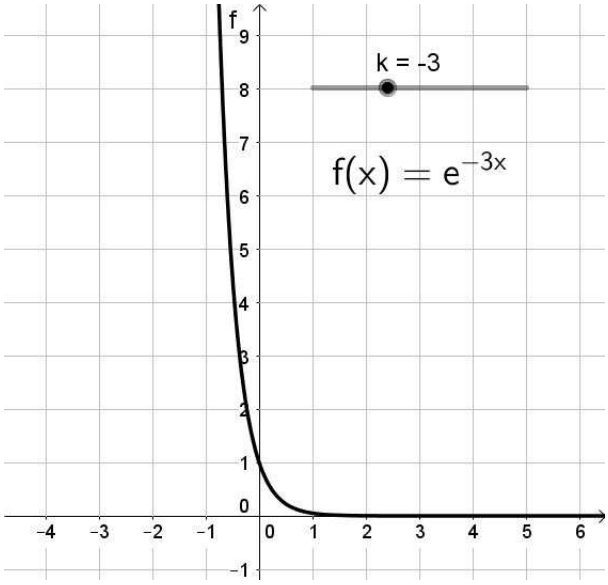
g est de la forme e^u où u est la fonction définie par : $u(x) = 3x+7$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 3$.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :
$g'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 3e^{3x+7}$.

2) Sens de variation

Propriété (admise) :
Soit k un nombre réel.
Si $k > 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{kx}$ est croissante.
Si $k < 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{kx}$ est décroissante.

Exemples :

$2 > 0$ donc la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est une fonction croissante.



$-3 < 0$ donc la fonction $x \mapsto e^{-3x}$ est une fonction décroissante.