

Séquence 1 : Variables aléatoires discrètes - Loi binomiale

I) Notion de variable aléatoire

A) Variable aléatoire

Définition :

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} , qui à tout élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Remarques :

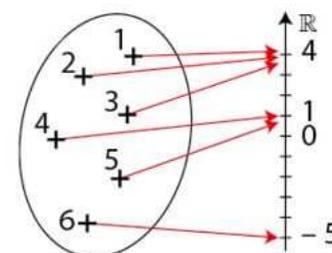
- Comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X est fini. On parle de variable aléatoire discrète.
- On nomme en général les variables aléatoires avec une lettre majuscule.

Exemples :

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Lorsque la face supérieure indique :

- 1, 2 ou 3, on gagne 4 €
- 4 ou 5, on gagne 1 €
- 6, on perd 5 €

On définit une variable aléatoire réelle X qui au numéro obtenu associe le gain, en euro, du joueur. Cette variable aléatoire prend les valeurs -5 ; 1 ; 4 .



Notations :

Soit a un nombre réel. On note :

- $\{X = a\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend la valeur a ".
- $\{X \leq a\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à la valeur a ".

B) Loi de probabilité

Définition :

Ω est l'ensemble fini des issues d'une expérience aléatoire.

X est une variable aléatoire réelle définie sur Ω qui prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .

Définir la loi de probabilité de X , c'est associer à chaque valeur x_i (avec $1 \leq i \leq n$), la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$.

Remarque :

On présente souvent la loi de probabilité de la variable aléatoire X à l'aide du tableau ci - dessous (avec $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$).

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemples :

En reprenant l'exemple précédent, la loi de probabilité de la variable aléatoire est donné par le tableau suivant.

x_i	-5	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

C) Espérance

La notion d'espérance est introduite par Christian Huygens dans son Traité du hasard de 1656 sous le nom de "valeur de la chance".

Définition :

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω . Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et qui prend n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n de probabilités respectives p_1, p_2, \dots, p_n .

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant.

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

Exemples :

On reprend l'exemple précédent et on rappelle que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-5	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = -5 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{-5}{6} + \frac{1}{3} + \frac{4}{2}$$

$$E(X) = \frac{-5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{12}{6} = \frac{9}{6} = 1.5$$

L'espérance est égale à 1.5 cela signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 1.5 €.

II) Loi binomiale

A) Définitions

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire dans laquelle on s'intéresse à la réalisation d'un événement particulier qu'on appelle le succès de probabilité p . Sa non réalisation s'appelle l'échec.

Exemple :

À la réception d'une commande d'un lot de pièces de boulons. 98 % des pièces sont conformes au cahier des charges, on prélève une pièce du lot. Cette épreuve aléatoire débouche sur deux issues :

- La pièce est conforme ce qui peut être considéré comme un succès,
- La pièce n'est pas conforme ce qui peut être considéré comme un échec.

Définition :

La répétition de façon identique et indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre p donne un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus suit alors la loi binomiale de paramètres n et p . On note :

$$X \sim \mathcal{B}(n; p)$$

Exemples :

Un magasin propose à ses clients sa nouvelle carte de fidélité. On suppose que la probabilité qu'un client l'accepte est de 0.4. Lorsqu'un client se présente à la caisse, il peut l'accepter ou la refuser. 5 clients se présentent à la caisse, chacun fait son choix indépendamment des autres.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X en précisant ses paramètres.

Résolution :

On effectue la répétition de 5 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, avec une probabilité p de succès égale à 0.4. X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.4$. On écrit $X \sim \mathcal{B}(5; 0.4)$

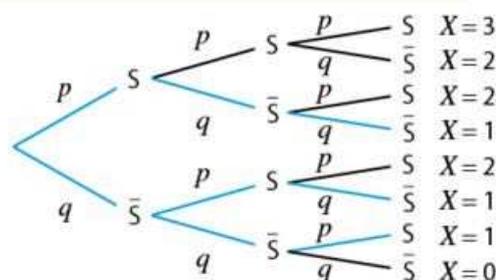
B) Coefficients binomiaux et calculs de probabilité

Définition :

Soit n et k deux entiers naturels ($k \leq n$). On appelle coefficient binomial ou combinaison de k parmi n , noté $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves.

Exemple :

$\binom{3}{1} = 3$: lors de trois répétitions d'une épreuve de Bernoulli, il y a trois chemins avec un seul succès ($S \bar{S} \bar{S}$; $\bar{S} S \bar{S}$ et $\bar{S} \bar{S} S$)



Convention : $\binom{0}{0} = 1$

Cas particuliers : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n-1} = n$

Exemples : $\binom{7}{0} = 1$; $\binom{8}{8} = 1$; $\binom{5}{1} = 5$; $\binom{6}{5} = 6$

Remarques :

On peut déterminer les coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal, d'un arbre de probabilité (si n n'est pas trop grand) ou à l'aide d'une calculatrice.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité que X soit égale à k est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Exemple :

En France, 45 % de la population est du groupe sanguin A. On choisit 5 personnes au hasard dans une grande ville française et on note X le nombre de personnes étant du nombre sanguin A dans cet échantillon.

Le nombre d'habitants étant élevé, on considère que le groupe sanguin d'une des personnes est indépendant de celui des autres. X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.45$.

Quelle est la probabilité que 3 de ces personnes soient du groupe A ?

Résolution :

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0.45^3 \times (1 - 0.45)^{5-3} = 10 \times 0.45^3 \times (0.55)^2 \approx 0.28$$

La probabilité que 3 de ces personnes soient du groupe A est d'environ 0.28.



C) Espérance , variance et écart-type

Propriété :

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètre n et p .

L'espérance de X est $E(X) = n \times p$.

La variance de X est $V(X) = np(1 - p)$.

L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple :

28 % des 14-20 ans aiment regarder Netflix.

On assimile le fait de choisir au hasard 10 personnes de cette tranche d'âge à un tirage aléatoire avec remise.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque groupe de 10 personnes le nombre de personnes qui aiment regarder Netflix. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.28$.

Déterminer l'espérance , la variance et l'écart-type de X .

Résolution :

$$E(X) = 10 \times 0.28 = 2.8.$$

Si on formait aléatoirement un grand nombre de groupes de 10 personnes de tranche d'âge 14-20 ans, il y aurait en moyenne environ 2.8 personnes aimant regarder Netflix.

$$V(X) = 10 \times 0.28 \times (1 - 0.28) = 2.016$$

La variance de X est de 2.016

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.016} \approx 1.42$$

L'écart type est d'environ 1.42