

# Séquence 2 : Logarithme népérien

En 1614, Neper définit le premier les logarithmes.

Le mot logarithme est construit sur les mots grecs logos dans le sens de rapport et arithmos, nombre.

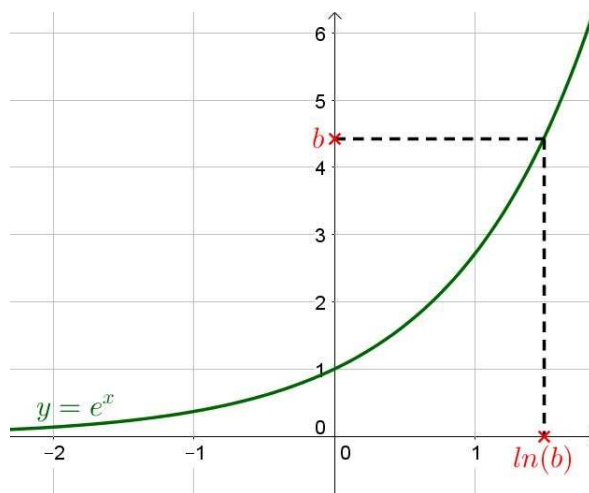
## I) Définition du logarithme népérien

Définition :

Soit  $b$  un nombre réel strictement positif.

L'unique solution de l'équation  $e^x = b$ , d'inconnue  $x$ , s'appelle le logarithme népérien de  $b$ , et se note  $\ln(b)$ .

On a alors  $x = \ln(b)$ .



Remarque :

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$

Exemples :

a)  $e^x = 100$ .

La solution de l'équation est  
 $x = \ln(100) \approx 4.6052$

b)  $e^x = 600$ .

La solution de l'équation est  
 $x = \ln(600) \approx 6.3969$

c)  $e^x = 5$ .

La solution de l'équation est  
 $x = \ln(5) \approx 1.6094$

Remarque :

Soit  $b$  un réel négatif. L'équation  $e^x = b$  n'a pas de solution.

Par exemple, l'équation  $e^x = -16$  n'a pas de solution.

Propriétés :

Soit  $b$  un réel strictement positif.

$$(1) \ln(e^b) = b$$

$$(2) e^{\ln(b)} = b$$

Remarques :

$$\ln(e^0) = \ln(1) = 0$$

$$\ln(e^1) = \ln(e) = 1$$

Exemples :

$$a) \ln(e^9) = 9$$

$$b) \ln(e^{4.5}) = 4.5$$

$$c) e^{\ln(3)} = 3$$

$$d) e^{\ln(0.7)} = 0.7$$

## II) Étude de la fonction logarithme népérien

### 1) Définition de la fonction logarithme népérien

Définition :

La fonction logarithme népérien notée  $\ln$  est la fonction qui, à tout réel  $x > 0$  associe  $\ln(x)$ .

Écrit autrement, on a :

$$\begin{array}{lcl} \ln : ]0; +\infty[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

### 2) Dérivabilité

Propriété (admise) :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout réel  $x > 0$ , si  $f(x) = \ln(x)$  alors  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

Exemples :

a) Soit  $f$  une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 6x + \ln(x) + 4$ .

Donner la dérivée de  $f$  puis donner son tableau de variation.

Résolution :

$f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables. Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 + \frac{1}{x} \\ f'(x) &= \frac{6x}{x} + \frac{1}{x} \\ f'(x) &= \frac{6x+1}{x} \end{aligned}$$

Déterminons le tableau de variation de la fonction  $f$ .

0 est la valeur interdite

$$\begin{aligned} 6x+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

$x$	0	$+\infty$
Signe de $6x+1$		+
Signe de $x$		+
Signe de $f'(x)$		+
Variation de $f$		

b) Soit  $g$  une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(x)(3x+5)$ . Donner la dérivée de  $g$ .

Résolution :

$g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme produit de fonctions dérivables. Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  on a :

$$u(x) = \ln(x)$$

$$v(x) = 3x+5$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 3$$

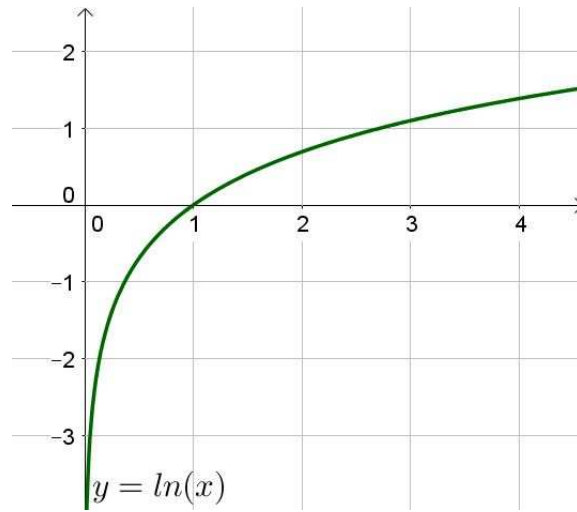
$$g'(x) = \frac{1}{x} \times (3x+5) + \ln(x) \times 3$$

$$g'(x) = \frac{3x+5}{x} + 3\ln(x)$$

### 3) Sens de variation et signe

Propriété admise :

La fonction logarithme népérien  $x \mapsto \ln(x)$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$



Exemples : Comparaison de nombres

a) Comparer  $\ln(4)$  et  $\ln(5)$ .

On sait que  $4 < 5$  donc  $\ln(4) < \ln(5)$  puisque la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

b) Comparer  $\ln(\sqrt{14})$  et  $\ln(\sqrt{3})$ .

On sait que  $\sqrt{3} < \sqrt{14}$  donc  $\ln(\sqrt{3}) < \ln(\sqrt{14})$  puisque la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

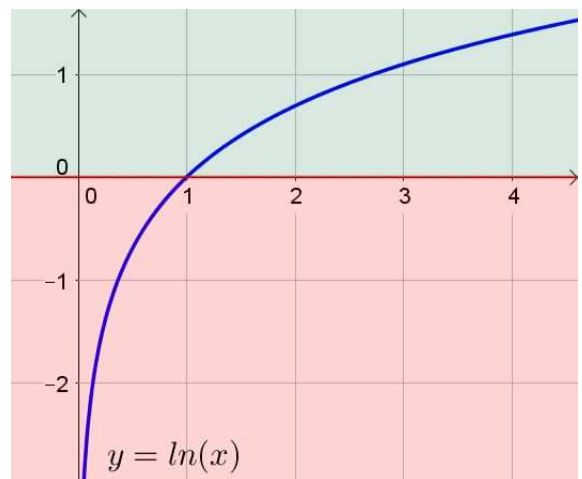
Propriété admise :

Si  $x \in ]0; 1[$  alors  $\ln(x) < 0$ .

Si  $x \in [1; +\infty[$  alors  $\ln(x) \geq 0$ .

Tableau de signes :

$x$	0	1	$+\infty$	
signe de $\ln(x)$		-	0	+



Exemples :

a)  $\ln(0.5) \approx -0.6931 < 0$  car  $0.5 \in ]0; 1[$

b)  $\ln(1.5) \approx 0.4055 > 0$  car  $1.5 \in [1; +\infty[$

### 4) Limites

Propriété (admise) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

### III) Propriétés algébriques du logarithme népérien

Propriété admise :

Pour tous nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$ ,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exemples :

a)  $\ln(6) = \ln(3 \times 2) = \ln(3) + \ln(2)$

b)  $\ln(5) + \ln(2) = \ln(5 \times 2) = \ln(10)$

Propriétés :

$a$  et  $b$  sont deux réels strictement positifs et  $n$  est un entier relatif.

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Exemples :

a)  $\ln(2^6) = 6 \ln(2)$

b)  $\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5)$

c)  $\ln\left(\frac{3}{7}\right) = \ln(3) - \ln(7)$

Exemples : Simplifier les expressions suivantes :

d)  $\ln(2^3 \times 10^4)$

$$= \ln(2^3) + \ln(10^4)$$

$$= 3 \ln(2) + \ln(10^4)$$

$$= 3 \ln(2) + 4 \ln(10)$$

e)  $\ln(12) - \ln(4) + 7 \ln(3)$

$$= \ln\left(\frac{12}{4}\right) + 7 \ln(3)$$

$$= \ln(3) + 7 \ln(3)$$

$$= 8 \ln(3)$$

f) Soit  $x$  strictement positif.

$$\ln(11x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(3x^{12}) - \ln(3)$$

$$= \ln(11) + \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(3x^{12}) - \ln(3)$$

$$= \ln(11) + \ln(x) - \ln(x) + \ln(3x^{12}) - \ln(3)$$

$$= \ln(11) + \ln(3x^{12}) - \ln(3)$$

$$= \ln(11) + \ln\left(\frac{3x^{12}}{3}\right)$$

$$= \ln(11) + \ln(x^{12})$$

$$= \ln(11) + 12 \ln(x)$$

Propriété admise :

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel  $x$  :

$$\ln(a^x) = x\ln(a)$$

Exemples :

a)  $\ln(17^{1.5}) = 1.5\ln(17)$

b) Exprimer l'expression suivante en fonction de  $\ln(7)$  et  $\ln(2)$

$$\ln(7^{8.8}) + \ln(14)$$

$$= 8.8\ln(7) + \ln(14)$$

$$= 8.8\ln(7) + \ln(7 \times 2)$$

$$= 8.8\ln(7) + \ln(7) + \ln(2)$$

$$= 9.8\ln(7) + \ln(2)$$

#### IV) Résolutions d'équations et d'inéquations

Propriétés admises :

1) Pour tout réel  $b$  strictement positif et tout réel  $a$ ,

$$\ln(b) = a \Leftrightarrow b = e^a$$

$$\ln(b) < a \Leftrightarrow b < e^a$$

2) Pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs.

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$$

Exemples d'équations

Exemple 1 : Résoudre des équations de la forme  $a^x = b$  :

$$8^x = 24$$

$$\Leftrightarrow \ln(8^x) = \ln(24)$$

$$\Leftrightarrow x\ln(8) = \ln(24)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(24)}{\ln(8)}$$

$$2 \times 3^x = 34$$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{34}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 17$$

$$\Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln(17)$$

$$\Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(17)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(17)}{\ln(3)}$$

Exemple 2 : Résoudre des équations de la forme  $x^a = b$  :

$$x^4 = 18$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^4) = \ln(18)$$

$$\Leftrightarrow 4\ln(x) = \ln(18)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(18)}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{\frac{\ln(18)}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(18)}{4}}$$

$$7x^6 + 1 = 22$$

$$7x^6 = 22 - 1$$

$$x^6 = \frac{21}{7} = 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^6) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow 6\ln(x) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(3)}{6}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{\frac{\ln(3)}{6}}$$

$$5 \Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(3)}{6}}$$

Exemple 3 : Résoudre des équations de la forme  $e^x = b$  :

$$e^x = 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$\mathcal{S} = \{\ln(3)\}$$

$$e^{2x+8} = 8$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x+8}) = \ln(8)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8 = \ln(8)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(8) - 8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(8) - 8}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln(8) - 8}{2} \right\}$$

Exemple 4 : Résoudre des équations de la forme  $\ln(x) = b$  :

$$\ln(x) = 7$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^7$$

$$\Leftrightarrow x = e^7$$

$$\mathcal{S} = \{e^7\}$$

$$2 \ln(x) = 98$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{98}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 49$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{49}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{49}$$

$$\mathcal{S} = \{e^{49}\}$$

### Exemples d'inéquations

Exemple 1 : Résoudre des équations de la forme  $a^x < b$  :

$$15^x < 30$$

$$\Leftrightarrow \ln(15^x) < \ln(30)$$

$$\Leftrightarrow x \ln(15) < \ln(30)$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{\ln(30)}{\ln(15)}$$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{\ln(30)}{\ln(15)} \right[$$

$$0.65^x \leq 7860$$

$$\Leftrightarrow \ln(0.65^x) \leq \ln(7860)$$

$$\Leftrightarrow x \ln(0.65) \leq \ln(7860)$$

Attention :  $\ln(0.65) < 0$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln(7860)}{\ln(0.65)}$$

$$\mathcal{S} = \left[ \frac{\ln(7860)}{\ln(0.65)}; +\infty \right[$$

Exemple 2 : Résoudre des équations de la forme  $x^a < b$  :

$$x^{5.7} \leq 456$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^{5.7}) \leq \ln(456)$$

$$\Leftrightarrow 5.7 \ln(x) \leq \ln(456)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{\ln(456)}{5.7}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \leq e^{\frac{\ln(456)}{5.7}}$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{\frac{\ln(456)}{5.7}}$$

$$\mathcal{S} = \left] 0; e^{\frac{\ln(456)}{5.7}} \right]$$

$$2x^3 - 2 \geq 358$$

$$2x^3 \geq 358 + 2$$

$$x^3 \geq \frac{360}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^3) \geq \ln(180)$$

$$\Leftrightarrow 3 \ln(x) \geq \ln(180)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{\ln(180)}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geq e^{\frac{\ln(180)}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{\ln(180)}{3}}$$

$$\mathcal{S} = \left[ e^{\frac{\ln(180)}{3}}; +\infty \right[$$

Exemple 3 : Résoudre des inéquations de la forme  $e^x < b$  :

$$e^{-6x+4} < 14$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-6x+4}) < \ln(14)$$

$$\Leftrightarrow -6x + 4 < \ln(14)$$

$$\Leftrightarrow -6x < \ln(14) - 4$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\ln(14) - 4}{-6}$$

$$\mathcal{S} = \left] \frac{\ln(14) - 4}{-6} ; +\infty \right[$$

$$e^{3x+1} \leq 163$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{3x+1}) \leq \ln(163)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 \leq \ln(163)$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq \ln(163) - 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln(163) - 1}{3}$$

$$\mathcal{S} = \left] -\infty ; \frac{\ln(163) - 1}{3} \right[$$

Exemple 4 : Résoudre des équations de la forme  $\ln(x) < b$  :

Résolvons l'inéquation  $\ln(x) - 1 < 24$  sur  $]0; +\infty[$

$$\ln(x) - 1 < 24$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) < 24 + 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) < 25$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} < e^{25}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{25}$$

$$\mathcal{S} = ]0; e^{25}[$$

Résolvons l'inéquation  $-8\ln(x) + 5 \leq 253$  sur  $]0; +\infty[$

$$-8\ln(x) + 5 \leq 253$$

$$\Leftrightarrow -8\ln(x) \leq 253 - 5$$

$$\Leftrightarrow -8\ln(x) \leq 248$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{248}{-8}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq -31$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geq e^{-31}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{-31}$$

$$\mathcal{S} = [e^{-31} ; +\infty[$$