Séquence 2 : Fiche d'exercices

Exercice 1

1. Sans utiliser la calculatrice, donner la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

   (a) $ln(1)$ (c) $ln(e)$ (e) $ln(e^2)$

   (b) $ln\left(\frac{1}{e}\right)$ (d) $ln\left(\frac{1}{e^4}\right)$ (f) $ln(e^{-3})$

2. Simplifier les nombres suivants :

   (a) $8ln(e)$ (c) $ln(e^5$ (e) $e^{ln(4)}$ (g) $-3ln(e^2)$

   (b) $ln(e^0)$ (d) $e^{ln(e)}$ (f) $-ln(e^{-7}$ (h) $ln\left(\frac{1}{e^6}\right)$

Exercice 2

A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième des nombres suivants :

1. $ln(2)$ 2. $ln(5)$ 3. $ln(0.5)$ 4. $ln(0.1)$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x = 1$ 3. $e^x = 5$ 5. $e^x = 1$ 7. $e^x = 10$
2. $e^x = 9$ 4. $e^x = -5$ 6. $e^x = 11$ 8. $e^x = 0.5$

Exercice 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur $]0;+\infty[$.

a. $f(x) = ln(x) + 9$ b. $h(x) = (x+9)ln(x)$ c. $h(x) = \dfrac{ln(x)}{7x+1}$

d. $f(x) = 4x - ln(x)$ e. $g(x) = -2xln(x)$ f. $i(x) = \dfrac{-6ln(x)}{11x}$

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité.

a. $g(x) = ln(5x+2)$ b. $d(x) = 3ln(-4x+7)$ c. $j(x) = 8ln(x+10) + 3x^2 - 3x + 11$

d. $f(x) = xln(x) - x$ e. $i(x) = \dfrac{3ln(x+8)+1}{3x-1}$ f. $i(x) = \dfrac{ln(8x+6)}{9x^2}$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x) - 3$.

1. Dériver la fonction f sur $]0;+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
3. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - 3x + 5$.

1. Calculer la dérivée de la fonction f et montrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{1-3x}{x}$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire que f admet un maximum sur $]0;+\infty[$. Préciser ce maximum et la valeur en laquelle il est atteint.

Exercice 8

Un promoteur immobilier estime que coût de production, en millions d'euros, pour n villas construites, est donné par : $C(n) = 0.4n + 5 - 2.8\ln(n+2)$ où n est un entier compris entre 0 et 40.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0;40]$ par : $f(x) = 0.4x + 5 - 2.8\ln(x+2)$.

1. Montrer que, pour tout réel x de $[0;40]$, $f'(x) = \dfrac{0.4x-2}{x+2}$
2. En déduire les variations de f sur $[0;40]$.
3. Combien de villas faut-il construire pour que le coût de production soit minimal ?
   Préciser le montant de ce coût minimum à 10 000 € près.

Partie B

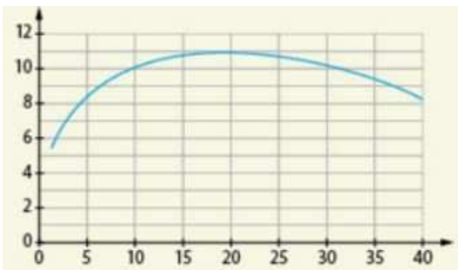
Chaque villa est vendue 300 000 €.

1. Montrer que le bénéfice réalisé pour la construction et la vente de n villas est, en millions d'euros, $-0.1n - 5 + 2.8\ln(n+2)$
2. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0;40]$ par : $g(x) = -0.1x - 5 + 2.8\ln(x+2)$.
3. Déterminer la valeur de x pour laquelle $g(x)$ est maximal.
4. En déduire la valeur du bénéfice maximal à 10 000 € près.

Exercice 9

Le nombre de bactéries dans une culture évolue en fonction de la température à laquelle on soumet cette culture. Pour une température x, comprise entre 1 et 40 degrés Celsius, le nombre de bactéries dans la culture, en millions, est modélisé par la fonction N définie par : $N(x) = -0.005x^2 + 0.1x + 5 + 2\ln(x)$.

1. La représentation graphique de la fonction N est donnée ci-dessous.

   Déterminer graphiquement le nombre maximal de bactéries et la valeur de la température en laquelle il est atteint.
2. Déterminer par le calcul le nombre de bactéries présentes dans une culture soumise à une température de 1°C.
3. (a) Montrer que la dérivée de la fonction N est la fonction définie sur $[1;40]$ par $\dfrac{-0.01(x+10)(x-20)}{x}$

   (b) En déduire les variations de N sur $[1;40]$.

   (c) Pour quelle température le nombre de bactéries est-il maximal ? Quel est ce nombre maximal ?

Exercice 10

1. Rappeler le sens de variation de la fonction ln.
2. Classer les nombres suivants dans l'ordre croissant :
   $ln(0.1)$, $ln(3)$, 0 , $ln(4)$, $ln(0.8)$ et 1.

Exercice 11

1. Soit a un réel. Pour quelles valeur de a le nombre $ln(a)$ est - il négatif? positif?
2. Déterminer le signe de chaque nombre :
   Série 1 : $ln(0.2)$, $ln(1.6)$, $ln(5.01)$ et $ln(0.9)$.
   Série 2 : $ln(0.8)$, $ln(0.15)$, $ln(1.05)$ et $ln\left(\dfrac{11}{2}\right)$
   Série 3 : $ln(10.2)$, $ln(0.12)$, $ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $ln(2.01)$
3. Ranger les nombres de chaque série dans l'ordre croissant.

Exercice 12

1) Exprimer en fonction de $ln(3)$ et $ln(5)$ les nombres suivants :

$ln(15)$, $ln(45)$, $ln\left(\dfrac{9}{125}\right)$, $ln\left(\dfrac{1}{135}\right)$ et $ln\left(\sqrt{75}\right)$.

2) Exprimer en fonction de $ln(2)$ et $ln(3)$ les nombres suivants :

$ln(8)$, $ln(12)$, $ln\left(\dfrac{9}{32}\right)$ et $ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+ln\left(\dfrac{2}{3}\right)+ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

3) Exprimer les réels suivants en fonction de $ln(3)$ et $ln(7)$.

$ln(21)$, $ln(63)$, $ln(189)$, $ln\left(\dfrac{9}{343}\right)$, $ln\left(\dfrac{1}{441}\right)$ et $ln\left(\sqrt{147}\right)$

4) a et b sont des réels strictement positifs. Exprimer en fonction de $ln(a)$ et $ln(b)$ les nombres suivants :

$ln\left(a^5\right)$, $ln\left(a^{-3}\right)$, $ln\left(a^2b^6\right)$, $ln\left(\dfrac{b^3}{a^2}\right)$ et $ln\left(\dfrac{a^8}{b^4}\right)+ln\left(\dfrac{b^7}{a^{10}}\right)$

Exercice 13

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme $bln(a)$ où a et b sont des entiers, a étant strictement positif et le plus petit possible :
   (a) $\ln(2)+\ln(3)$
   (b) $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$
   (c) $\ln(49)$
   (d) $\ln(25)-\ln(5)$
2. (a) Écrire les nombres suivant sous la forme $\ln(a)$ où a est un réel strictement positif :
   $A=\ln(2)+\ln(5)$
   $B=\ln(18)-\ln(2)$
   $C=2\ln(3)$
   $D=3\ln(2)$
   (b) Comparer les nombres A et B.
   (c) Comparer les nombres C et D.

Exercice 14

On donne les valeurs de $ln(2)$, $ln(3)$ et $ln(5)$ arrondie à 10^{-4} près.

x	2	3	5
$ln(x)$	0.6931	1.0986	1.6094

En déduire une valeur approchée des nombres suivants :

A = $ln(0.5)$
B = $ln(6)$
C = $ln(16)$
D = $ln(20)$
E = $ln(150)$
F = $ln(4000)$

BONUS : (Exercice 14) Mettre sous la forme $ln(a)$ où $a > 0$

$A = 2ln(6) + ln(2)$ $\qquad B = 2ln\left(\frac{1}{5}\right)$ $\qquad C = -2ln(4) + ln(3)$ $\qquad D = ln(5) - 3ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 15

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage.
Cette fusée a une masse vide, c'est à dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes.
L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les aires jusqu'à la consommation totale de son carburant, le propergol. La vitesse d'éjection des gaz V_e est de 3200 $m.s^{-1}$.
La vitesse finale de la fusée, atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de $8000 m.s^{-1}$ pour obtenir la mise en orbite souhaitée.
Le but de cet exercice est de déterminer la masse de propergol qui permet cette mise en orbite du satellite.

On note x la masse (en tonne) de propergol au décollage. Elle est comprise entre 100 et 900 tonnes. La masse totale de la fusée est alors de $(x + 50)$ tonnes. Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$ (en $m.s^{-1}$) est donnée par : $f(x) = V_e \times (ln(x + 50) - ln(50))$ où x est un réel de l'intervalle $[100; 900]$.

1. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[100; 900]$: $f(x) = 3200 \times ln(0.02x + 1)$.
   (b) Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle est la vitesse de la fusée ?
   (c) Avec 400 tonnes de propergol au décollage, la mise en orbite est-elle possible ?
2. (a) Calculer l'expression de $f'(x)$, la dérivée de la fonction f.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
3. On cherche à déterminer la masse minimale (en dizaines de tonnes) de propergol à mettre dans les réservoirs à l'aide de l'algorithme suivant :

```python
from math import log

def fusee() :
    x= 0
    while 3200*log(0.02*x+1)<= 8000 :
        x = x + 10
    return x
```

   Compléter le tableau ci-dessous.

Valeur de x	Valeur de $f(x)$ arrondie à l'unité	Condition $f(x) \leqslant 8000$
500	7673	VRAIE
510	...	...
...	...	...

Exercice 16

Écrire cette somme à l'aide d'un seul ln :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right).$$

Exercice 17

1. $2e^x = 14$
2. $x^6 = 24$
3. $\ln(x) = 18$
4. $-3\ln(x) + 5 = -4$
5. $5^x = 20$
6. $e^{-3x+1} - 1 = 9$

Exercice 18

1. $12e^x + 4 = 11$
2. $\dfrac{x^7}{5} = 20$
3. $\ln(x) = -64$
4. $2\ln(x) - 8 = 1$
5. $5^x + 4 = 9$
6. $e^{2x-4} - 2 = 33$

Exercice 19

Le pH (potentiel hydrogène) d'une solution permet d'exprimer son caractère acide ou basique. Pour une solution acide, on $1 < pH < 7$. Pour une solution basique, on $7 < pH < 14$. Le pH est obtenu grâce à la concentration d'ion hydronium H_3O^+. Si on note x la concentration, en $mol.L^{-1}$, des ions hydronium dans la solution, le pH est alors égal à $-\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

1. Quel est le pH d'une solution dont la concentration en ion hydronium est $10^{-7} mol.L^{-1}$?
   On dit que cette solution est neutre.
2. Le jus de citron a un pH de 2.3, quelle est la concentration en ions H_3O^+ ?
3. Une fois ingéré, le citron devient alcalin, c'est à dire permet une augmentation du pH de l'organisme.
   Dans certains cas, après ingestion du jus de citron, la concentration en ions H_3O^+ de l'organisme est multiplié par 0.95 . Quelle est alors l'augmentation du pH ? Arrondir au millième.

Exercice 20

Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyau suivant la loi $N(t) = N(0)e^{-kt}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures, k une constante réelle.

1. Déterminer la constante k pour le thorium, sachant qu'avec $N(0) = 1000$, on a $N(1) = 937$. Arrondir à 10^{-3}.
2. La période d'un élément radioactif est le temps au bout duquel il reste la moitié de ses atomes.
   Calculer la période du thorium. Arrondir à la minute.

Exercice 21

Tout élément radioactif se désintègre au cours du temps. Le nombre d'atomes radioactifs $N(t)$ où t désigne le temps (en année) est donnée par :
$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ où λ est une constante positive dépendant de l'élément radioactif étudié et N_0 le nombre initial de noyaux radioactifs.

1. On désigne par T le temps au bout duquel la moitié des atomes radioactifs a disparu c'est à dire que l'on a $N(T) = 0.5N_0$. T s'appelle la période ou demi-vie de l'élément radioactif.
   (a) Exprimer λ en fonction de T.
   (b) La demi-vie du radium est de 1622 ans. En déduire la valeur de λ correspondante.
   Arrondir le résultat à 10^{-5} près.
   (c) Pour l'uranium 238, on sait que $\lambda = 1.54 \times 10^{-10}$. En déduire sa demi-vie.
   Arrondir à l'année la plus proche.
2. On considère un échantillon de césium 137 dont la demi-vie est de 30 ans.
   (a) Si cet échantillon contient 5.5×10^{14} noyaux radioactifs, combien en contiendra-t-il 30 ans plus tard ?
   Et 120 ans plus tard ?
   (b) Déterminer le temps nécessaires pour que la quantité de noyaux radioactifs de l'échantillon soit divisée par 1000.

Exercice 22

1. $3e^x > 18$
2. $x^2 \leqslant 24$
3. $\ln(x) < -16$
4. $6\ln(x) + 2 \geqslant -8$
5. $0.5^x > 31$
6. $e^{-4x+10} + 5 \geqslant 7$

Exercice 23

1. $e^x - 0.4 < 1$
2. $\dfrac{5x^7}{7} \geqslant 6$
3. $\ln(x) > 94$
4. $0.25\ln(x) + 1 \leqslant 21$
5. $2^x - 5 \leqslant -1$
6. $e^{-8x-3} + > 33$

Exercice 24

Dans une grosse cuve, on chauffe un liquide et on appelle $g(t)$ sa température, en degrés Celsius, à l'instant t exprimé en secondes, g étant une fonction définie sur $[0; +\infty[$. On admet que la fonction g est définie par : $g(t) = -80e^{-0.0002t} + 100$.

1. Quelle est la température du liquide à l'instant initial ?
2. Quelle sera la température du liquide au bout d'une heure ? Arrondir au degré près.
3. Au bout de combien de secondes la température est-elle égale à 85 °C ? Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la seconde près.
4. On donne le programme suivant écrit en Python :

```python
from math import*
def cuve():
    t=0;y=20
    while y<=60:
        t=t+1
        y=-80*exp(-0.0002*t)+100
    return t
```

   (a) Déterminer la valeur retournée par l'appel $cuve()$.

   (b) Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

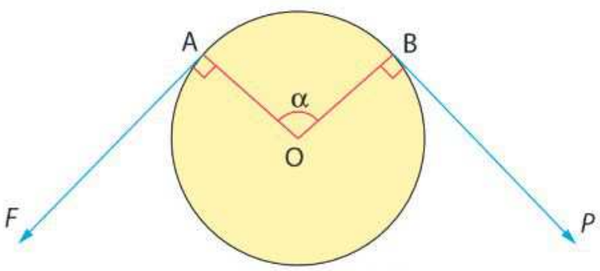
Exercice 25

On considère la fonction f définie sur $[0.01; 0.5]$ par $f(x) = -300x \times ln(x)$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0.01; 0.5]$.
2. Résoudre $ln(x) + 1 \geqslant 0$ et en déduire le tableau de variations de f.

Exercice 26

Pour hisser un poids P à l'aide d'une corde enroulée sur une poulie fixe, il faut exercer une force $F = Pe^{f\alpha}$ où e est la constante d'Euler, f le coefficient de frottement de la corde sur la poulie, α une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.



On donne $f = 0.075$; déterminer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de α permettant de hisser un poids de 45 newtons, en exerçant une force de 52 newtons.

Devoir Maison

Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0.5;25]$ par : $f(x) = 8.68\ln(x) + 93.28$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère défini à la question 3.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0.5;25]$.
3. (a) Compléter le tableau de valeurs numériques ci-après, en faisant figurer les valeurs arrondies à l'entier le plus proche.

x	0,5	1	2	5	10	16	25
$f(x)$	88			108			122

   (b) Le plan est muni d'un repère orthonormé. Pour le tracé, on prendra 1 cm (ou 1 carreau) pour 2 unités, en abscisses et en ordonnées. De plus, on graduera l'axe des ordonnées à partir de 86. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B : Application à l'acoustique

Quand l'oreille d'une personne "normale" est soumise à une pression acoustique x, exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par : $f(x) = 8.68\ln(x) + 93.28$.

1. Déterminer l'intensité sonore, en décibels, correspondant à une pression acoustique de 14 bars :
   (a) graphiquement, en faisant apparaitre les constructions utiles sur le graphique de la partie A.
   (b) par le calcul.
2. Une personne "normale" ne peut supporter un bruit supérieurs à 120 décibels. Déterminer la pression, en bars, que l'oreille de la personne subit si elle est soumise à une intensité sonore de 120 décibels :
   (a) graphiquement, en faisant apparaître les constructions utiles sur le graphique de la partie A.
   (b) par le calcul.

Exercice 2

On considère un plant de maïs. Sa croissance est modélisée par la fonction f définie sur $[0;250]$ par $f(t) = \dfrac{2}{1+19e^{-0.04t}}$ où t désigne le temps exprimé en jours et $f(t)$ désigne la hauteur du plant de maïs, exprimée en mètres.

1. On donne le script incomplet d'une fonction Python.

```
from math import*
def plant():
    t=0 ; y=0.1
    while y<= ...:
        t=...
        y=2/(1+19*exp(-0.04*t))
    return ...
```

   Recopier et compléter le programme ci-dessus afin que l'appel $plant()$ retourne le nombre de jours nécessaires pour que le plant de maïs dépasse 1.95 mètre.
2. Calculer le nombre de jours minimal nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1.5 m.
3. (a) Montrer que, pour tout réel t de $[0;250]$, $f'(t) = \dfrac{1.52e^{-0.04t}}{(1+19e^{-0.04t})^2}$
   (b) En déduire les variations de la fonction f sur $[0;250]$.

Exercice supplémentaire : Décharge d'un condensateur

La tension $V(t)$ aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor varie en fonction du temps t suivant la loi $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ où V_0 est la tension initiale, R la résistance du résistor, C la capacité du condensateur. On donne $C = 12\mu F$ (microfarads).
Calculer R en ohms, sachant que la tension est tombée au $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes.

Exercice supplémentaire : Décharge d'un condensateur

La tension $V(t)$ aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor varie en fonction du temps t suivant la loi $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ où V_0 est la tension initiale, R la résistance du résistor, C la capacité du condensateur. On donne $C = 12\mu F$ (microfarads).
Calculer R en ohms, sachant que la tension est tombée au $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes.

Exercice supplémentaire : Décharge d'un condensateur

La tension $V(t)$ aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor varie en fonction du temps t suivant la loi $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ où V_0 est la tension initiale, R la résistance du résistor, C la capacité du condensateur. On donne $C = 12\mu F$ (microfarads).
Calculer R en ohms, sachant que la tension est tombée au $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes.

Exercice supplémentaire : Décharge d'un condensateur

La tension $V(t)$ aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor varie en fonction du temps t suivant la loi $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ où V_0 est la tension initiale, R la résistance du résistor, C la capacité du condensateur. On donne $C = 12\mu F$ (microfarads).
Calculer R en ohms, sachant que la tension est tombée au $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes.

Exercice supplémentaire : Décharge d'un condensateur

La tension $V(t)$ aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor varie en fonction du temps t suivant la loi $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ où V_0 est la tension initiale, R la résistance du résistor, C la capacité du condensateur. On donne $C = 12\mu F$ (microfarads).
Calculer R en ohms, sachant que la tension est tombée au $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes.

Exercice supplémentaire : Décharge d'un condensateur

La tension $V(t)$ aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor varie en fonction du temps t suivant la loi $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ où V_0 est la tension initiale, R la résistance du résistor, C la capacité du condensateur. On donne $C = 12\mu F$ (microfarads).
Calculer R en ohms, sachant que la tension est tombée au $\frac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes.