Séquence 3 : Primitives

I) Définition

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que $F' = f$.

Exemple :

Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 3$ et $F(x) = 2x^3 - 3x + 4$.
Montrer que F est une primitive de f

Résolution :

Propriété :
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

II) Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Propriété :
Si f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle.

Exemple :

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 3$.
On considère les fonctions F_c de la forme $F_c : x \mapsto 2x^3 - 3x + C$ où C est une constante réelle.
Montrer que les fonctions F_c sont des primitives de f

Résolution :

Propriété :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Remarque :
Lorsqu'on demande une primitive sans condition particulière, on prend habituellement $C = 0$.

Exemple :

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 3$. Les primitives de la fonction f sont les fonctions de la forme $x \longmapsto 2x^3 - 3x + C$ où C est une constante réelle.
Déterminer l'expression de la primitive F de f telle que $F(2) = 6$

Résolution :

III) Primitives des fonctions de référence

Fonction f	Primitive F	Sur l'intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = ln(x) + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$	$\mathbb{R}$

Exemples :

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Résolution :

IV) Opérations algébriques

Propriétés :

- Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si G est une primitive de g sur I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de f sur un intervalle I, et si a est un nombre réel, alors aF est une primitive de af sur I.

Remarque :

$F \times G$ n'est pas en général une primitive de $f \times g$. De même pour l'inverse $\dfrac{1}{G}$ et le quotient $\dfrac{F}{G}$. Exemples :

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 8$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 8x^3$.
Déterminer les primitives F de f et G de g sur $\mathbb{R}$.

Résolution :

Fonction f	Primitive F	Sur l'intervalle I
$f = u'u^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	u est une fonction dérivable sur I
$f = \dfrac{u'}{u^2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$F = \dfrac{-1}{u} + C$	u est une fonction dérivable sur I ne s'annulant pas sur I.
$f = \dfrac{u'}{u^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$F = \dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	u est une fonction dérivable sur I ne s'annulant pas sur I.
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(u) + C$	u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I
$f = u'e^u$	$F = e^u + C$	u est une fonction dérivable sur un intervalle I
$f = u' \sin u$	$F = -\cos u + C$	u est une fonction dérivable sur un intervalle I
$f = u' \cos u$	$F = \sin u + C$	u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Exemples :

On considère les fonctions suivantes définies sur leur ensemble de définition.
Déterminer les primitives de chacune des fonctions.

$f(x) = 8(8x+1)^5$ $\qquad g(x) = \dfrac{6x+7}{(3x^2+7x+4)^2}$ $\qquad h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad k(x) = 3e^{8x}$