Séquence 3 : Fiche d'exercices

Exercice 1

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$), de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \dfrac{1}{3}$

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 7x$

e) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$

f) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - \dfrac{1}{2}x + 2$

g) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -5t^3 + 3t^2 + 8$

h) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

i) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = 4y^4 - 7x^3 - 2x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 2x + 25$

Exercice 2

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$), de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de).

a) f définie sur $]-\infty; 0[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) f définie sur $]-\infty; 0[$ par $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{4}{x^2}$

c) f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

d) f définie sur $]-\infty; 0[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

e) f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 6x^2 - 11x + \dfrac{6}{x^4}$

f) f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{5}{x^4}$

Exercice 3

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$), de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3\sin(3t)$

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 7\sin\left(7t + \dfrac{\pi}{12}\right)$

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(6t - \dfrac{\pi}{8}\right)$

e) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\sin\left(-4t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

f) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(8t + \dfrac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 4

Déterminer la primitive F de la fonction vérifiant la condition donnée.

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 9x + 32$ et $F(0) = 25$

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x + \dfrac{2}{3}$ et $F(0) = 18$

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $F(0) = 0$

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin\left(11t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $F(0) = 0$

Exercice 5

On se propose de déterminer le moment fléchissant en un point M de la poutre AB de longueur 6 m (voir la figure), x est exprimé en mètres.

Toutes les fonctions figurant dans cet exercice sont définies sur l'intervalle $I = [0, 6]$. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = -600x$.

1. Déterminer la primitive F de f pour laquelle $F(0) = 3600$.
2. Déterminer la primitive G de F pour laquelle $G(0) = 0$.
   Le nombre $G(x)$ représente le moment fléchissant au point M.

Exercice 6

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$), de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(2x-1)^3$

b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+6)(x^2+6x+13)^4$

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-7)^2$

d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(5x+10)^4$

e) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -12(8x+1)^3$

f) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(3x^2+8)^2$

Bonus : f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}\ln(x)$

Exercice 7

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$), de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

a) f définie sur $]-\infty; 3[$ par $f(x) = \dfrac{2}{(2x+6)^2}$

b) f définie sur $]-\infty; 2[$ par $f(x) = \dfrac{7}{(7x-14)^2}$

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{((x^2+1)^2}$

d) f définie sur $]\dfrac{2}{3}; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{(3x-2)^2}$

e) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x}{(6x^2+5)^2}$

f) f définie sur $]-20; +\infty$ par $f(x) = \dfrac{-3}{(x+20)^2}$

Exercice 8

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{9}{-8x-1}$

Exercice 9

Soit f une fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-8x}{(x-2)^2}$.

1. Vérifier que, pour tout réel x de $]2;+\infty$, $f(x) = 2 - \dfrac{8}{(x-2)^2}$
2. En déduire les primitives de f sur $]2;+\infty[$.
3. Déterminer la primitive F de f sur $]2;+\infty[$ telle que $F(3) = 1$.
4. On considère l'écran de calcul formel ci-dessous :

```
1 integrate((3x^2 - 36x)/(x - 6)^2)
```

$3*x+\dfrac{108}{x-6}$

   Vérifier que G est une primitive de g sur $]6;+\infty[$

Exercice 10

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I.

a) f définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b) f définie sur $I =]3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{2x-6}$.

c) f définie sur $I =]-\infty;2[$ par $f(x) = \dfrac{-9}{-9x+18}$.

d) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x-5}{3x^2-5x+4}$.

e) f définie sur $I = \left]\dfrac{-1}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{-4}{3x+1}$.

f) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

g) f définie sur $I =]-1.5;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{6x+8}$.

Exercice 11

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
2. En déduire les primitives de la fonction ln sur $]0;+\infty[$.

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants , vérifier que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

a) $f(x) = x + 14 - 12\ln(2x)$; $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 26x - 12x\ln(2x)$.

b) $f(x) = x^2 - 18\ln(x) + 75$; $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 18\ln(x) + 93x$

c) L'expression de $F(x)$ peut être déterminée par un logiciel de calcul formel comme ci-dessous.
Vérifier la justesse du résultat donnée par le logiciel.

```
1 simplify(integrate(5ln(5x) + 6x + 8))
```

$3*x^2+5*x*\ln(5*x)+3*x$

Exercice 13

Soit f, g et G les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 - 2\ln(x)$, $g(x) = \ln(x)$ et $G(x) = x\ln(x) - x$.

1. Démontrer que G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 14

Déterminer les primitives sur R de la fonction f.

a) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x$.

b) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}e^x$.

c) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(t) = t + 15 + e^t$.

d) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^2 + 12x + 9e^x$.

Exercice 15

a) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5e^{0.5x}$.

b) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = (8x+6)e^{4x^2+6x+9}$.

c) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{-x+5}$.

d) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{2x}$.

e) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+3}$.

f) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = 6e^{0.2x}$.

g) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(t) = 11e^{3t+10}$.

h) f définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = 7xe^{x^2+1}$.

Exercice 16

Dans chacun des cas suivants f et F sont définies sur R.
Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(t) = (2t+1)e^t$; $F(t) = (2t-1)e^t$
2. $f(t) = (-t+2)e^{-t}$; $F(t) = (t-1)e^{-t}$
3. $f(t) = (t+1)^2e^{-t}$; $F(t) = (-t^2-4t-5)e^{-t}$
4. $f(t) = \dfrac{e^{0.125t}}{4.9 + e^{0.125t}}$; $F(t) = 8\ln(4.9 + e^{0.125t})$