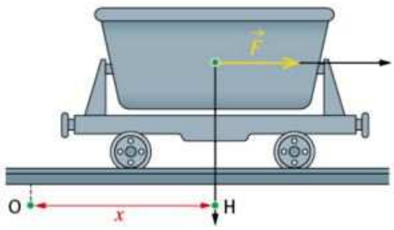
Activité introductive

1. Un chariot de 200 kg se déplace sur une voie rectiligne, soumis à une force d'entrainement $\overrightarrow{F}$.
   La position du chariot est repérée par la distance $d(t)$ du point H à l'origine O du repère en fonction du temps, exprimé en secondes.

   La fonction d, qui à t associe $d(t)$ vérifie la relation (E) :

   $$200d''(t) + 25d'(t) = 50 \text{ pour t} \geqslant 0.$$

   (a) Montrer que la fonction f telle que $f(t) = 2t$ est une solution de l'équation différentielle (E).

   (b) (Bonus) Montrer que la fonction g telle que $g(t) = 2t - 16 + 16e^{-0.125t}$ est une autre solution de l'équation différentielle (E).

2. On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé.
   Le nombre $N(t)$ de bactéries par millilitre à l'instant t (en secondes) vérifie pour tout $t \geqslant 0$ la relation (E) :

   $$N'(t) = 0.2N(t)$$

   (a) Soit u la fonction définie pour tout $t \geqslant 0$ par $u(t) = e^{0.2t}$.
   Calculer la dérivée de u, puis montrer que la fonction u vérifie la relation (E).

   (b) Justifier que la fonction v définie pour tout $t \geqslant 0$ par $v(t) = 5e^{0.2t}$ est aussi une solution de l'équation (E).

   (c) Justifier que la fonction w définie pour tout $t \geqslant 0$ par $w(t) = 48e^{0.2t}$ est la solution de (E) telle que le nombre de bactéries à l'instant 0 est 48.

   (d) Justifier que la fonction z définie pour tout $t \geqslant 0$ par $z(t) = 536e^{0.2t}$ est la solution de (E) telle que le nombre de bactéries à l'instant 0 est 536.

   (e) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).