Séquence 4 : Fiche d'exercices

Exercice 1

1. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2$ est une solution de l'équation différentielle $3y' - 2y + 4 = 0$.
2. Montrez que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas une solution de l'équation différentielle $xy' = 1$.
3. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -1.5 + e^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 3$.
4. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ est une solution de l'équation différentielle $x^2 y' - y = 2x^3 - x$, avec x réel.
5. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-x} + 1$ est une solution de l'équation différentielle $y" + y' = 0$.
6. Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + e^{-5x}$ est une solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} + 5y = 10$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles proposées.

a. $y' = 10y$	b. $y' = -3y$	c. $y' + 4y = 0$	d. $y' + 7y = 0$
e. $6y' - 12y = 0$	f. $4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$	g. $y' - 0.2y = 0$	h. $7\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

Bonus : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes : $\sqrt{8}y = \sqrt{2}y'$ et $y = 4y'$

Exercice 3

On étudie une culture de microbes, et on s'intéresse à leur vitesse de prolifération.
Le nombre de microbes $N(t)$ est exprimé en fonction du temps t (en heures).
La vitesse de prolifération est la dérivée N'. On suppose que la fonction N est une solution de l'équation différentielle $y' = 0.3y$.

1. Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.
2. On suppose que $N(0) = 10000$. En déduire la fonction N vérifiant cette condition.

Exercice 4

Au début de la croissance de certaines espèces végétales telle que le maïs, le coton ou le soja, la vitesse de croissance (en $g/jour$) est proportionnelle à la masse M(en g). Pour certaines espèces de coton, M varie en fonction de t (en jours) selon l'équation différentielle $M'(t) = 0.19M(t)$.

Niveau 1 :

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. La plante pesait $0.09g$ au début du mois, déterminer la fonction M vérifiant cette condition.
3. En déduire, la masse d'une plante à la fin d'un mois ($t = 30$).

Niveau 2 :

1. Évaluer la masse d'une plante à la fin d'un mois ($t = 30$ jours) si la plante pesait 90 mg au début de ce mois.

Exercice 5

Une catastrophe a rendu impropre à la consommation l'eau potable d'une commune. L'eau du réseau contient une substance chimique dont l'évolution de la concentration (en $mg.L^{-1}$ en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis le début de la pollution est modélisée par une fonction f solution de l'équation différentielle $y' + 0.06y = 0$. Cette concentration est actuellement de 30 $mg.L^{-1}$.

1. Déterminer l'expression de f
2. Quelle est la concentration, à 10^{-2}, de la substance chimique dans l'eau au bout d'une journée ?
3. L'eau sera de nouveau consommable si la concentration de la substance chimique dans l'eau est inférieure à 0.05 $mg.L^{-1}$. Au bout de combien de temps pourra t-on de nouveau consommer l'eau du robinet ?

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles proposées.

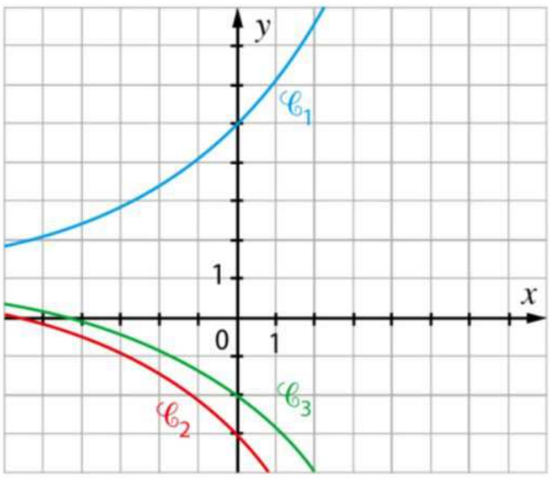
a. $y' = 3y + 7$	b. $y' = -8y + 1$	c. $2y' = 9y + 2$	d. $3y' + 12y - 24 = 0$
e. $10y' + y = 30$	f. $\dfrac{dy}{dx} + 0.15y = 4.5$	g. $\dfrac{1}{200}y' + y = 146$	h. $7\dfrac{dy}{dx} - 0.4y = 28$

Exercice 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles proposées et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a. $y' = -8y + 3$; $y(0) = 3$	b. $y' = -10y + 100$; $y(100) = 1$	c. $y' + 0.05y = 2$; $y(0) = 25$	d. $2y' - 3y = 6$; $y(2) = e$	e. $7y' + 4y - 7 = 0$; $y(7) = 1$

2. Les courbes ci-dessous représentent trois solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' = y - 1$.



Résoudre cette équation différentielle, puis donner des équations des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$

Exercice 8

Un moteur thermique fonctionne avec un système de circulation d'eau de refroidissement . On admet que la température de l'eau, exprimée en degré Celsius (°C), est donnée à l'instant t, exprimé en minutes, par $f(t)$ où f, fonction définie sur $[0; +\infty[$, est solution de l'équation différentielle : $y' + 0.04y = 2.04$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle pour une température initiale de l'eau égale à 90 °C.

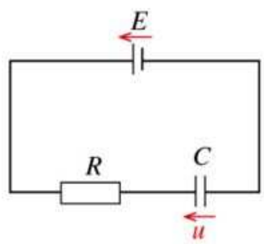
Exercice 9

Un individu travaillant dans une pièce où la température ambiante est de 30 °C a beaucoup trop chaud : il met en route un climatiseur dans le but d'atteindre une température de 20 °C. On note $f(t)$ la température de la pièce, exprimée en degrés Celsius, à l'instant t, exprimé en heures, avec $t \geqslant 0$. On admet que f vérifie l'équation différentielle : $y' + y = 20$.
A l'instant $t = 0$, qui correspond au moment où le climatiseur est mis en route, la température de la pièce est de 30 °C.

1. Donner l'expression de $f(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
2. A partir de quel l'instant t pour lequel la température de la pièce est inférieure ou égale à 25 °C.
3. A partir de quel instant t la température souhaitée sera t-elle atteinte ?

Exercice 10

On étudie la charge d'un condensateur. Le circuit électrique ci-dessous est composé d'une source de tension continue E de $10V$, d'une résistance R de $10^5\,\Omega$ et d'un condensateur de capacité C de 10^{-6} farads (F).
On note u la tension exprimée en volts aux bornes du condensateur. Cette tension u est une fonction du temps t $(t \geqslant 0)$ exprimé en secondes. Elle vérifie l'équation différentielle : $RC\dfrac{du}{dt} + u = E$.



1. Déterminer la forme générale $u(t)$ des solutions de cette équation différentielle.
2. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction u telle que $u(0) = 0$.
3. Dans cette question, on considère que $u(t) = -10e^{-10t} + 10$.
   Étudier le sens de variation de la fonction u sur $[0; +\infty[$.
4. Déterminer, en justifiant la réponse, la limite en $+\infty$ de la fonction u obtenue. Interpréter ce résultat.
5. On souhaite déterminer le temps de charge t (en secondes) pour que $u(t)$ soit supérieur ou égal à 95 % de E.
6. Compléter le programme Python ci-contre afin que l'appel $temps(9.5)$ retourne la plus petite valeur de t telle que $u(t)$ soit supérieur ou égal à 9.5.
7. Déterminer cette valeur par un calcul et en donner un arrondi au dix-millième.

```python
from math import *

def temps(seuil) :
    t = 0
    while ..................... < seuil :
        t = t + 0.1
    return t
```

Exercice 11

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence. Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane. La concentration d'octane dans la cuve, en moles par litre, est modélisée par une fonction f du temps t, exprimé en minutes. On admet que f est une solution , sur $[0;+\infty[$, de l'équation différentielle $y' + 0.12y = 0.003$.
A l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de 0.5 $mol.L^{-1}$.

1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.
   (b) En utilisant la condition initiale , déterminez l'expression algébrique de la fonction f.
2. (a) Dans cette question, on admet que $f(t) = 0.475e^{-0.12t} + 0.025$.
   Calculer $f'(t)$ pour t dans $[0;+\infty[$.
   (b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$
3. Calculer, à la minute près, le temps nécessaire pour obtenir une concentration en octane dans la cuve de 0.25 $mol.L^{-1}$.
4. (a) (Bonus) Calculer, en justifiant la réponse, la limite de de f quand t tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
   (b) Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure.
   Expliquer ce choix.

Exercice 12

Pour les besoins d'une enquête, la police scientifique doit déterminer l'heure d'un homicide. Au moment de la découverte du corps de la victime, il était 2h20 du matin, la température extérieure était de −5 °C et celle du cadavre était de 20 °C . Trois quart d'heure après, la température du corps n'était plus que de 15 °C.
On admet que la température du corps de la victime peut être modélisée par une fonction T solution de l'équation différentielle $T'(t) = K(T(t) - T_a)$, où $T(t)$ est la température du corps, exprimée en degrés Celsius, à l'instant t, exprimé en minutes , avec $t \geqslant 0$, K est une constante réelle négative et T_a est la température du milieu ambiant.

1. Montrer que $T(t) = e^{Kt} - 5$, pour $t \geqslant 0$.
2. Montrer que $K \approx -0.005$ (arrondi à 10^{-3}).
3. En supposant qu'à l'heure du crime, la température de la victime était de 37 °C, déterminer l'heure du meurtre à la minute près.

Exercice 13

Partie A :
On considère l'équation différentielle $y' + 0.0865y = 0$ où y est une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. Résoudre cette équation.
2. Déterminer la fonction f solution de l'équation vérifiant la condition initiale $f(0) = 4$.

Partie B :
Le but de cette partie est l'étude de la décroissance radioactive de l'iode 131. On considère la fonction N définie sur $[0;+\infty[$ par $N(t) = 4e^{-0.0864t}$. On admet que $N(t)$ donne le nombre de noyaux, exprimé en millions, d'iode 131 présents dans un échantillon à l'instant t, exprimé en jours.

1. Déterminer la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. En donner une interprétation physique.
2. Étudier les variations de la fonction N sur $[0;+\infty[$.
3. Calculer au bout de combien de jours le nombre de noyaux radioactifs est inférieur à 750 000.
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer le temps nécessaire pour que le nombre de noyaux radioactifs passe de 4 millions à 2 millions.

Exercice 14

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - y = x^2 - x - 1$ dans laquelle y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle.
3. En déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$

Exercice 15

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 6e^{-x}$, où y désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $y' + 3y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^{-x}$
3. Déterminer la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$

Exercice 16

Soit (E) l'équation différentielle $3y' - 2y = -20\cos(2t)$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle $3y' - 2y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 10\cos(2t) + Ce^{\frac{2}{3}x}$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E)
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 17 : Pour aller plus loin

Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + 3y = 6t^2 - 7t - 7$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène.
2. Déterminer trois constantes a, b et c telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = at^2 + bt + c$ soit solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.
5. Même question pour l'équation différentielle (E_1) : $6y' - 2y = 4x^2 - 5$

Exercice 18 : Pour aller plus loin

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 4y = 2e^{3t}$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène.
2. Déterminer une constante réelle K telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = Ke^{3t}$ soit solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 19

On s'intéresse à la chute d'un parachutiste, avant l'ouverture de son parachute. On admet que la vitesse du parachutiste pendant la chute (exprimée en $m.s^{-1}$) peut être modélisée par une fonction V solution de l'équation différentielle : $my'(t) + ky(t) = mg$ où m est la masse totale du parachutiste et de son parachute (en kg), k est un coefficient dépendant de la résistance de l'air, g est le coefficient de l'accélération de la pesanteur et t représente le temps (en secondes).
Dans la suite du problème on considère que $m = 80\ kg$, $k = 25$ unités S.I et $g = 10\ m.s^{-2}$.
Au début de la chute, $t = 0$ et $V(0) = 0$.

1. Montrer que V est solution de l'équation différentielle : $y' + 0.3125y = 10$ puis résoudre cette équation.
2. Déterminer une expression de la vitesse $V(t)$ du parachutiste à l'instant t.
3. Déterminer par le calcul la valeur exacte de l'instant t_0 à partir duquel la vitesse dépasse 20 $m.s^{-1}$.
4. Étudier les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
5. Le parachutiste peut - il atteindre 130 $km.h^{-1}$.

Exercice 20

Une entreprise fabrique des pièces de fonte graphite sphéroïdal GS pour l'industrie automobile.
Coulées dans des moules de sable, ces pièces montent à 1400 °C et sont entreposées dans un local à 30 °C.
Elles peuvent être démoulées dès que leur température est inférieure à 650 °C.
La température (en °C) d'une pièce de fonte est une fonction du temps(en heure, h) depuis sa sortie du four.
On admet que f est une solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' + 0.065y = 1.95$.

a. Résoudre (E) sur $[0; +\infty[$.
b. En déduire l'expression de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
c. Quel est le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$? Justifier la réponse.
c. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter le résultat.
d. Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée.
Arrondir le résultat à la minute près.