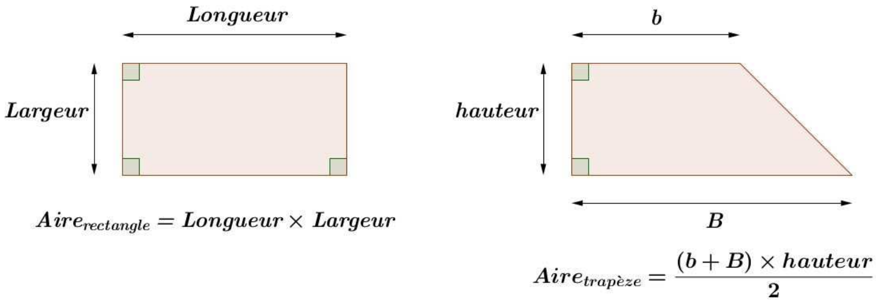
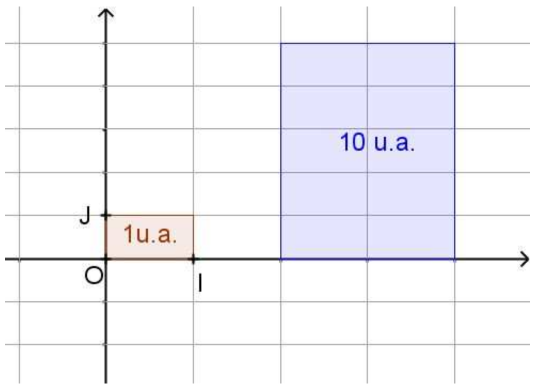
Séquence 5 : Intégration

I) Intégrale d'une fonction positive

Rappels :



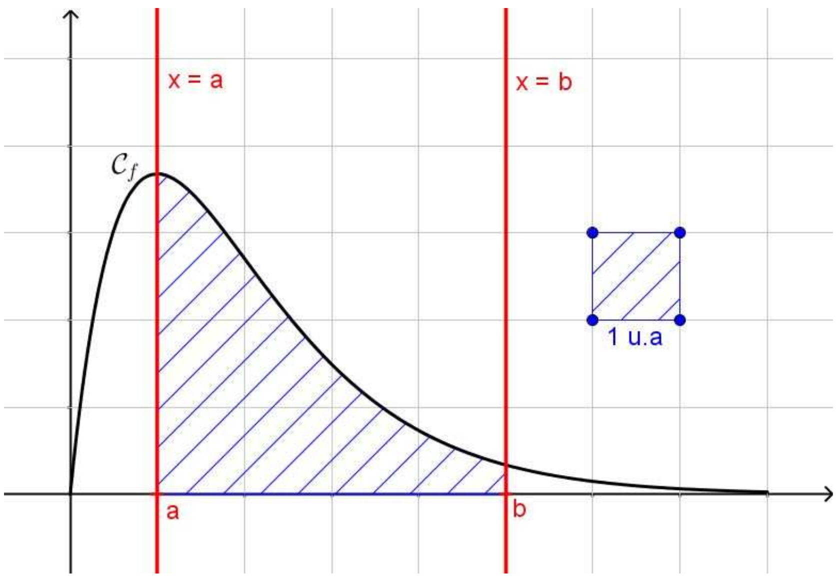
Définition :
Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on appelle unité d'aire (notée $u.a.$) l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$. Autrement dit, $1u.a. = OI \times OJ$.



Définition :
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$, l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Cette intégrale se note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et se lit "intégrale de a à b de f.

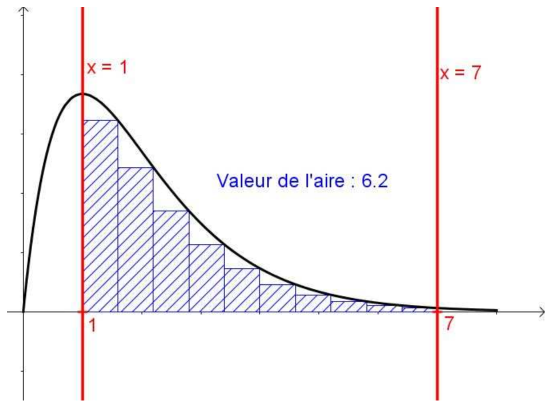


Remarques : Dans la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

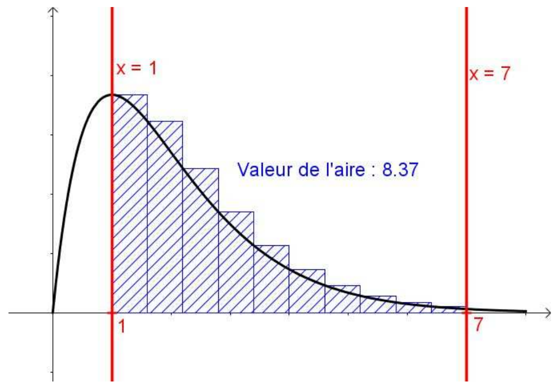
- a est la borne inférieure et b est la borne supérieure.
- x est la variable, elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas ailleurs.
  Ainsi, on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$
- $\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y$ nous permettent de connaître la variable d'intégration.

On peut approcher la valeur d'une intégrale d'une fonction positive en utilisant la méthode des rectangles ou des trapèzes. Déterminons par exemple une valeur approchée de $\int_1^7 10xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

Méthode des rectangles (par valeurs inférieures)



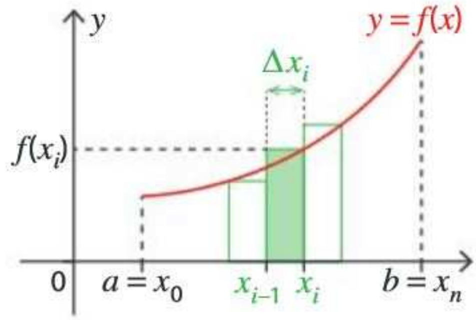
Méthode des rectangles (par valeurs supérieures)



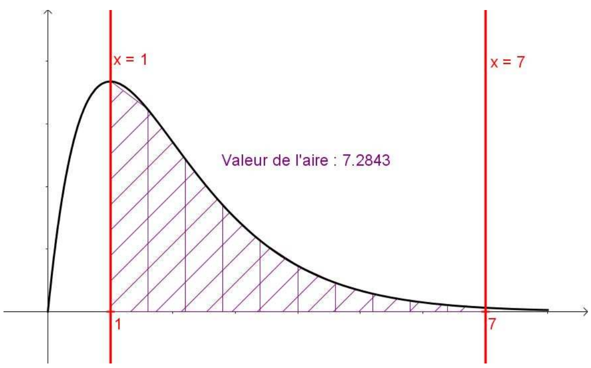
La méthode des rectangles permet d'obtenir l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

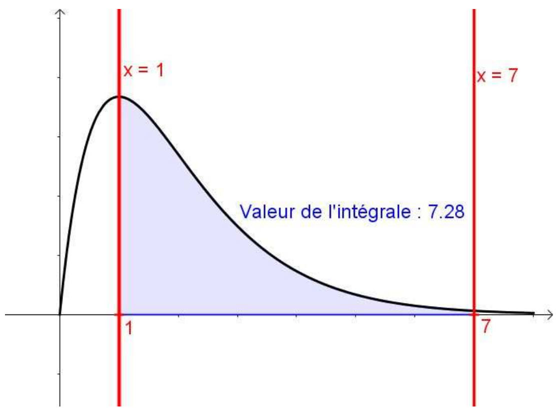
où Δx_i est la largeur des rectangles $\left(\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}\right)$ et $f(x_i)$, leur hauteur.



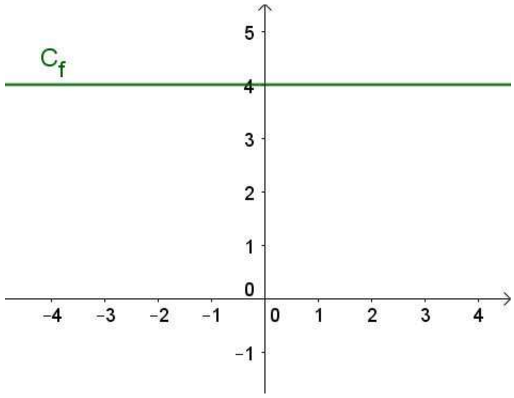
Méthode des trapèzes



Valeur de $\int_1^7 10xe^{-x}\,\mathrm{d}x$



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4$.

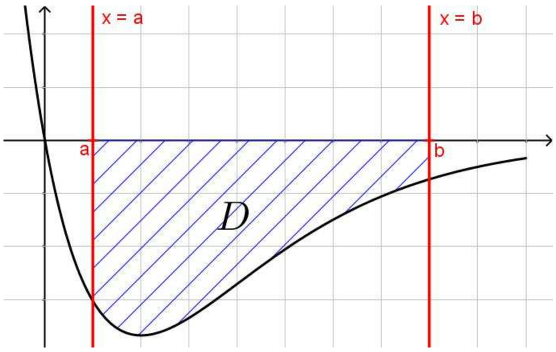


Déterminer $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

II) Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Définition :
Soient a et b tels que $a \leqslant b$, f une fonction négative sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

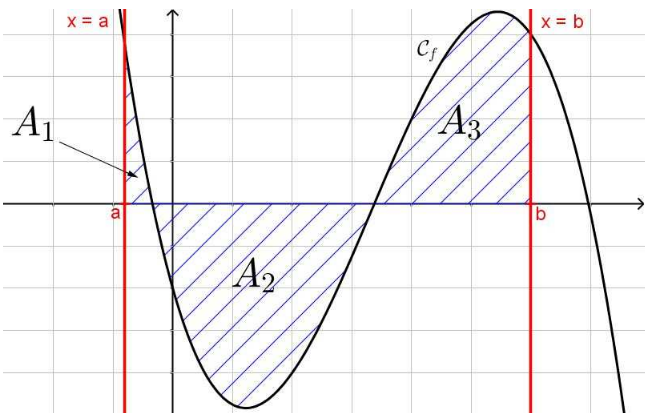
L'intégrale de f entre a et b, notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est égale à l'opposé de l'aire (en unité d'aire) du domaine du plan D délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\text{aire}(D)$



Définition :
Soient a et b tels que $a \leqslant b$, f une fonction dont le signe varie sur l'intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

L'intégrale de f entre a et b, notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est égale à la somme des aires algébriques

(en unité d'aire) des domaines sur lesquels f garde un signe constant : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$



III) Propriétés de l'intégrale

Propriétés (Positivité) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
3. Pour tout x de $[a;b]$, si $f(x) \leqslant 0$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$

Propriété (Comparaison) :
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel x de $[a;b]$, si $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

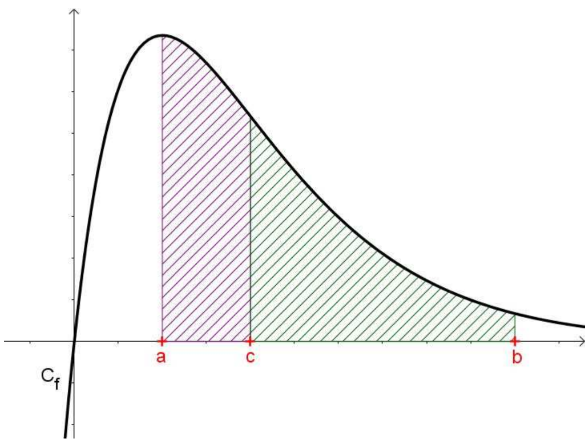
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriétés (Linéarité) :
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel quelconque.

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Propriété (Relation de Chasles) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$, a, b, c trois réels tels que $a \leqslant c \leqslant b$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



IV) Lien entre intégrales et primitives

Boite à outils : Primitives usuelles.

Fonction f	Primitive F	Sur l'intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln(x) + C$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$	$\mathbb{R}$

Fonction f	Primitive F	Sur l'intervalle I
$f = u' u^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$F = \dfrac{1}{n+1} u^{n+1} + C$	u est une fonction dérivable sur I
$f = \dfrac{u'}{u^2}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$F = \dfrac{-1}{u} + C$	u est une fonction dérivable sur I ne s'annulant pas sur I.
$f = \dfrac{u'}{u^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$F = \dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	u est une fonction dérivable sur I ne s'annulant pas sur I.
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(u) + C$	u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I
$f = u' e^u$	$F = e^u + C$	u est une fonction dérivable sur un intervalle I
$f = u' \sin u$	$F = -\cos u + C$	u est une fonction dérivable sur un intervalle I
$f = u' \cos u$	$F = \sin u + C$	u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Propriété :
Soit f une fonction définie sur $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Propriété :
Soient F et f deux fonctions telles que F est une primitive de f sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Déterminer $\int_1^2 6x^2 + 4x\,\mathrm{d}x$.

Solution :
Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = 6x^2 + 8x$.
Une primitive de f sur $[1;2]$ est la fonction F telle que $F(x) = 2x^3 + 4x^2$.

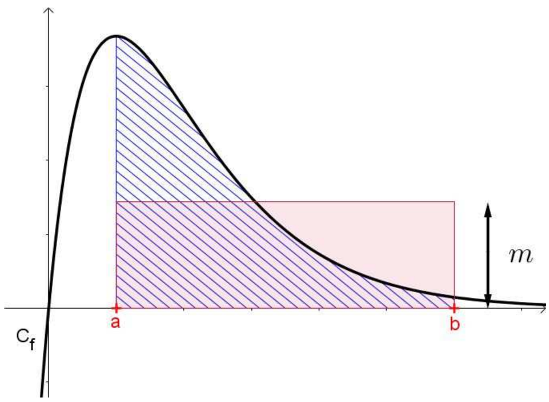
$\int_1^2 6x^2 + 4x\,\mathrm{d}t = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1)$

$F(2) = 2 \times 2^3 + 4 \times 2^2 = 16 + 16 = 32$
$F(1) = 2 \times 1^3 + 4 \times 1^2 = 2 + 4 = 6$

$\int_1^2 6x^2 + 4x\,\mathrm{d}t = \left[2x^3 + 4x^2\right]_1^2 = 32 - 6 = 26$

Définition (Valeur moyenne) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$, le réel m :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Propriétés (Calcul d'aire entre deux courbes) :
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a;b]$. Pour réel x de $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
L'aire ,exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre leur courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$