Séquence 5 : Fiche d'exercices

Exercice 1

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[-1;7]$ telle que $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int_{0}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ et $\int_{-1}^{7} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

1. $\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{-1}^{7} 5f(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\int_{-1}^{7} 10f(x)+3g(x)\,\mathrm{d}x$
3. Donner la valeur de $\int_{4}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$
4. Calculer $\int_{0}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[0;5]$ telle que $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int_{2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ et $\int_{0}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. $\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_{0}^{5} -2f(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\int_{0}^{5} -6f(x)-4g(x)\,\mathrm{d}x$
3. Donner la valeur de $\int_{6}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$
4. Calculer $\int_{5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 3

Partie 1 :

1) $\int_{0}^{3} 2x+1\,\mathrm{d}x$
2) $\int_{-1}^{2} 0.1x^2+9\,\mathrm{d}x$
3) $\int_{2}^{5} 3x^2-5x+7\,\mathrm{d}x$
4) $\int_{-4}^{8} 11\,\mathrm{d}x$
5) $\int_{3}^{5} 6x\,\mathrm{d}x$
6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\,\mathrm{d}x$
7) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} sin(x)+8\,\mathrm{d}x$
8) $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{0} 3sin(x)+5x^3\,\mathrm{d}x$
9) $\int_{-3}^{2} 3x^2(x^3+1)^2\,\mathrm{d}x$
10) $\int_{-4}^{10} (5x+4)^3\,\mathrm{d}x$
11) $\int_{4}^{8} \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
12) $\int_{7}^{8} \frac{1}{(3x+4)^2}\,\mathrm{d}x$

Partie 2 :

1)a) Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-9}{(x-2)^2}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Montrer que la fonction F définie sur $]2;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{2x+5}{x-2}$ est une primitive de f sur $]2;+\infty[$.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

2)a) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = xcos(x)$. Calculer $G'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} -xsin(x)+cos(x)\,\mathrm{d}x$

Partie 3 :

Un parachutiste se lance dans un avion. Il effectue une chute libre durant 5 secondes avant d'ouvrir son parachute. Soit t un nombre réel dans l'intervalle $[0;5]$. On considère que la vitesse $v(t)$ du parachutiste, en $m.s^{-1}$, après t secondes de chute est donnée par l'égalité suivante : $v(t) = \int_0^t 9.81\,\mathrm{d}x$

1) Quelle est la vitesse en $m.s^{-1}$ après 3 secondes de chute puis après 5 secondes de chute ?

2) Soit t un nombre réel de $[0;5]$. Déterminer $v(t)$.

Exercice 4

1) $\int_{-4}^{2} 3e^{3x}\,\mathrm{d}x$	2) $\int_{1}^{7} -0.5e^{-0.5x}\,\mathrm{d}x$	3) $\int_{-3}^{2} 2e^{2x+5}\,\mathrm{d}x$	4) $\int_{-2}^{-1} 6xe^{3x^2}\,\mathrm{d}x$
5) $\int_{3}^{9} e^{6x}\,\mathrm{d}x$	6) $\int_{4}^{5} 2e^{8x+1}\,\mathrm{d}x$	7) $\int_{0}^{1} 5xe^{x^2}+4\,\mathrm{d}x$	8) $\int_{-6}^{4} 8x^2+3e^{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 5

1) $\int_{7}^{10} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$	2) $\int_{2}^{3} \frac{1}{x}+7\,\mathrm{d}x$	3) $\int_{6}^{4} \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$
4) $\int_{10}^{9} 3x+4+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$	5) $\int_{5}^{7} \frac{10x+4}{5x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$	6) $\int_{1}^{8} \frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

7)a) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = ln(x)$.
On considère la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = xln(x) - x$. Montrer que F est une primitive de f.

b) En déduire $\int_{4}^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$

8)a) Soit g la fonction définie sur $]\frac{-8}{5};+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{100}{5x+8}$.
On considère la fonction G définie sur $]\frac{-8}{5};+\infty[$ par $G(x) = 20ln(5x+8)$. Montrer que G est une primitive de g.

b) En déduire $\int_{0}^{12} g(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 6

On donne l'expression d'une fonction définie sur un intervalle I. Calculer sa valeur moyenne sur I.

$f(x) = 3x^5$ sur $I = [0;2]$

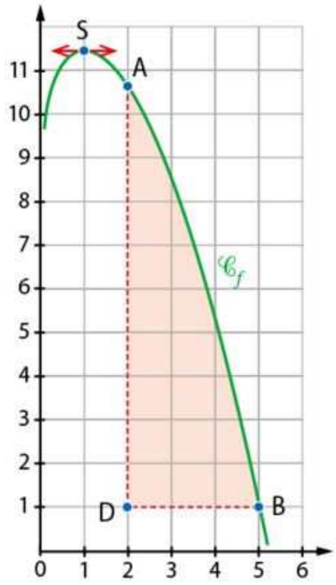
$g(x) = 2x^2 + x + 7$ sur $I = [1;4]$

$h(x) = 2\sin(2x+1)$ sur $I = \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

$s(x) = \cos(4x-6) + 8x$ sur $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 7

Un ingénieur prépare un plan pour fabriquer la voile d'un petit bateau. Cette voile est représentée en rouge dans le repère orthonormé ci-contre dans lequel l'unité est le mètre. $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0.1;5.2]$ par $f(x) = 12 - 0.5x^2 + ln(x)$.



1. Montrer que la fonction F définie sur $[0.1;5.2]$ par $F(x) = 11x - \frac{1}{6}x^3 + xln(x)$ est une primitive de f sur $[0.1;5.2]$.
2. En admettant que f est positive sur $[2;5]$, calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation d'équation $x = 2$ et $x = 5$. Arrondir au dixième de m^2 près.
3. Cette voile est fabriquée dans un tissu ayant une masse de 260 grammes par mètre carré. La voile pèsera-t-elle moins de 5 kg? Justifier la réponse.

Exercice 8

Lors de la propagation d'une épidémie de gastro-entérite dans un collège, on modélise par la fonction f définie par $f(t) = 20t^2 - 2t^3$ le nombre de malades présents dans la population, t jours après l'apparition de la maladie. Déterminer le nombre moyen de malades sur la période des 15 premiers jours.

Exercice 9

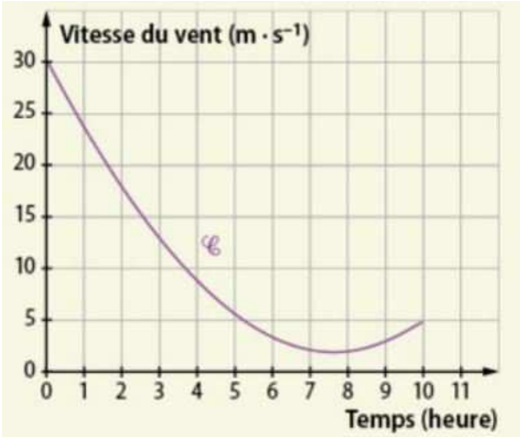
On étudie le mouvement d'un point mobile sur l'intervalle de temps $[0;20]$. Le temps est exprimé en secondes. Sa vitesse en $m.s^{-1}$ est donnée par $v(t) = 2t^2 + 3t$.
1) Calculer la voleur moyenne de la fonction v sur $[0;20]$.
2) Que représente cette valeur moyenne?

Exercice 10

Une entreprise informatique produit et vend des clés USB. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;15]$ par $B(x) = -x^2 + 10x + 9$, où x représente le nombre de milliers de clés produites et vendues.
Calculer le bénéfice mensuel moyen de cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend de 0 à 10 000 clés.

Exercice 11

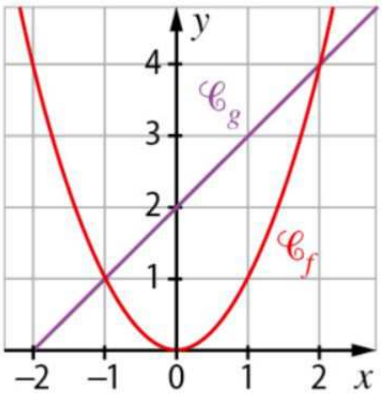
Un gérant de parc éolien surveille la vitesse du vent afin de prévoir la puissance fournie par ses éoliennes.
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f qui modélise la vitesse du vent en fonction du temps lors d'une durée de 10 heures.



1) Estimer graphiquement la vitesse moyenne du vent sur l'intervalle $[0;10]$. Expliquer la démarche.
2) La fonction f est définie sur $[0;10]$ par $f(x) = 0.48x^2 - 7.3x + 30$. En déduire la vitesse moyenne du vent sur l'intervalle $[0;10]$.

Exercice 12

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2 + x$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g (voir ci-dessous).



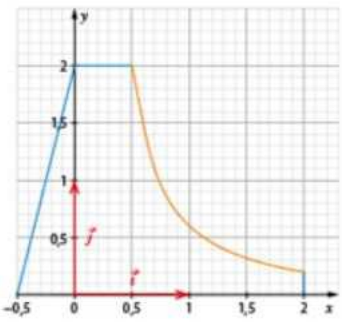
1) Déterminer le signe de $g(x) - f(x)$.
2) Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$

Exercice 13

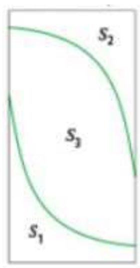
1) Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$
2) Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
3) Donner l'aire de cette surface en cm^2.

Exercice 14

Une entreprise veut réaliser les deux montants latéraux d'un toboggan. La courbe qui modélise le toboggan est définie comme une partie de la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f dans un repère orthonormé adapté. La partie utile de la courbe $\mathscr{C}$ qui modélise le toboggan est délimitée par les points de coordonnées $(0.5;2)$ et $(2;0.2)$, comme l'illustre le schéma ci-dessous.



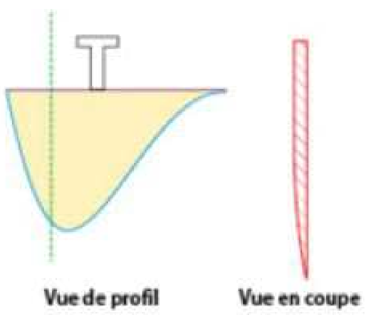
1) (Bonus) La fonction f est définie, pour tout nombre réel x strictement positif, par $f(x) = a + \dfrac{b}{x^2}$, où a et b sont deux nombres réels. Déterminer a et b.
2) On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0.5;2]$ par $f(x) = 0.08 + \dfrac{0.48}{x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 m.
Montrer que, l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0.5$ et $x = 2$ vaut 0.84 .
3) Les montants sont réalisés dans des plaques de métal rectangulaires de 2.5 m sur 1.5 m.
On suppose que chaque plaque a une masse de 500 kg. Chaque plaque permet de fabriquer deux montants comme ceux représentés sur le dessin, ci-après. Les surfaces S_1 et S_2 de taille identique, correspondent aux deux montants latéraux d'un toboggan, et la surface S_3 restante est perdue.



a) Montrer que l'aire en m^2 de la surface restante S_3 est égale à 2.07 .
b) Déterminer la masse, en kg, de la partie inutilisée de la plaque correspondant à la surface S_3.

Exercice 15

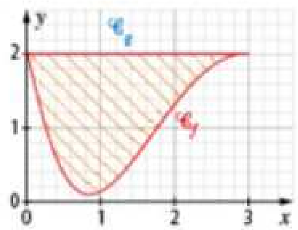
Une entreprise est en phase de conception d'ailerons de planche de surf. Ces ailerons sont constitués d'un boîtier qui se fixe sur la planche de surf et d'une partie qui sera en contact de l'eau. Voici deux vues de l'aileron (les deux vues ne sont pas à la même échelle).
L'axe en pointillé, dans la vue de profil, correspond à l'endroit où le plan de coupe a été effectué.



L'entreprise cherche à déterminer le volume de l'aileron afin d'estimer la quantité de matière nécessaire à sa fabrication.

Partie A

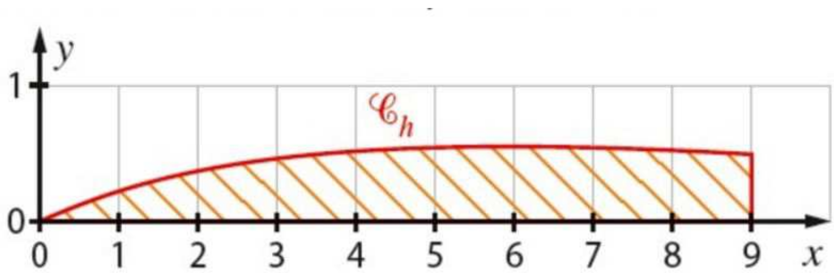
Onse place dans un repère orthonormé d'unité 5 cm. On considère les fonctions f et g définies sur $[0;3]$ par : $f(x) = 0.14x^4 - 1.44x^3 + 4.85x^2 - 5.43x + 2$ et $g(x) = 2$. Le profil latéral de l'aileron peut être modélisé par la surface D délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 3$.



1) Evaluer l'aire de la partie hachurée en unités d'aire, puis en cm^2.
2) On admet que, pour tout x dans $[0;3]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.
Déterminer l'aire en unités d'aire, puis en cm^2, de la surface D. Arrondir au centième.

Partie B

On se place dans un repère orthonormé d'unité 1 cm. On considère la fonction h, définie sur $[0;9]$ par $h(x) = 0.0019x^3 - 0.04x^2 + 0.26x$.
Une vue en coupe de l'aileron peut être modélisée par la surface D' délimitée par la courbe $\mathscr{C}_h$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 9$.



3) Montrer que la valeur moyenne, arrondie au centième, de la fonction h sur $[0;9]$ est 0.44 .
4) En considérant que l'épaisseur moyenne de l'aileron en entier est la même que sur le plan de coupe, calculer le volume de l'aileron en cm^3. (arrondir au centième).

Exercice 16

On considère les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4(x)}\,\mathrm{d}x$

1)a) Quelle est la dérivée de la fonction f définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$?

1)b) Calculer l'intégrale I.

2)a) Soit la fonction g définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$.

Démontrer que g est dérivable sur l'intervalle considéré et que, pour tout x de cet intervalle, $g'(x) = \dfrac{3}{\cos^4(x)} - \dfrac{2}{\cos^2(x)}$.

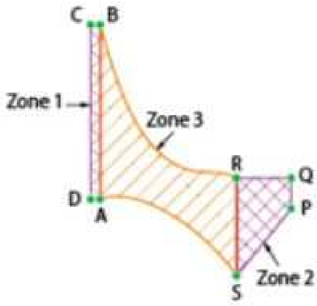
2)b) Déduire du calcul précédent une relation entre les intégrales I et J.

2)c) Calculer J.

Exercice 17

Pour récupérer le plastique se trouvant dans les mers et les océans, un navire expérimental s'inspirant de la forme des raies manta est en projet : le Manta. Le navire est prévu pour produire lui-même l'énergie nécessaire à son fonctionnement, grâce entre autres, à des panneaux solaires. Le but de cet exercice est de déterminer la surfaces des panneaux solaires sur un flanc du navire. Le schéma ci-dessus représente la surface des panneaux solaires sur un flanc droit du navire.

On a partagé cette surface en 3 zones :
La zone 1 : un rectangle ABCD tel que AB = 35 m et BC = 2 m
La zone 2 : un trapèze rectangle PQRS tel que PQ = 6 m, RQ = 7.2 m et RS = 18.75 m; La zone 3, qui a été modélisée, et dont la surface, dans la surface, dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1 m correspond à la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 25$; la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[0;25]$ par $f(x) = -0.003x^3 + 0.185x^2 - 3.92x + 48$; la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie sur $[0;25]$ par $g(x) = -0.03x^2 + 0.15x + 15$.



1)a) Montrer que la fonction $F(x) = -0.00075x^4 + \dfrac{0.185}{3}x^3 - 1.96x^2 + 48x$ est une primitive de f sur $[0;25]$.

1)b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2)a) Déterminer une primitive G de la fonction g sur $[0;25]$.

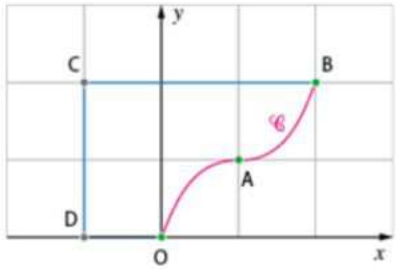
2)b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{25} g(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Déduire des questions précédentes que l'aire de la zone 3 est d'environ 380 m^2, au dixième près.

4) Déterminer la surface totale de panneaux solaires sur le flanc droit du navire (arrondir au dixième).

Exercice 18

On souhaite fabriquer deux supports identiques pour une étape. On a représenté ci-dessous la face latérale de l'un des supports. Afin d'évaluer la quantité de peinture nécessaire, on cherche à connaître l'aire de la face latérale des supports.



On admet que la partie courbée est modélisée par la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $[0;2]$ dans un repère orthonormé d'unité 1 dm.
On admet aussi que pour tout x de $[0;2]$ on a $f(x) \leqslant 2$.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $O(0;0)$; $A(1;1)$ et $B(2;2)$.
Les points C et D ont pour coordonnées respectives $(-1;2)$ et $(-1;0)$.

1) Par lecture graphique, donner un encadrement de l'intégrale $\int_0^2 (2-f(x))\,\mathrm{d}x$ par deux entiers.

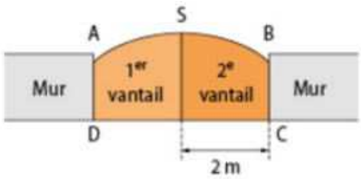
2) On admet que, pour tout x dans $[0;2]$, on a $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x$, où a et b sont des nombres que l'on souhaite déterminer.
a) Déterminer $f(1)$ et $f(2)$.
b) Déduire de la question précédente un système d'équations vérifié par a et b.
c) Déterminer l'expression de $f(x)$.

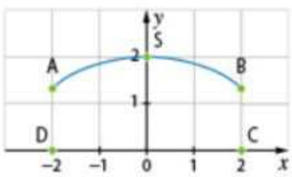
3) On considère maintenant que la fonction f est définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
En déduire l'aire de la face latérale d'un montant en dm^2, puis en cm^2.

4) Chaque support est fabriqué à partir d'une planche de chêne de deux centimètres d'épaisseur.
Sachant que la masse volumique de ce bois de chêne est $800kg.m^{-3}$, déterminer la masse de chacun des supports.

Exercice 19

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte mesure 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur 2 mètres. Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-dessous.





Les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires au seuil $[CD]$ du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.
Cette portion de courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = ax^2 + b$, où a et b sont des nombres réels.
Le repère est choisi de façon à ce que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-2; f(-2))$, $(2; f(2))$, $(2;0)$ et $(-2;0)$. On note S le sommet de la courbe représentant f, comme illustré ci-dessous.
1)a) Le point S a pour coordonnées $(0;2)$. En déduire la valeur de b.
1)b) Le point B a pour coordonnées $(2;1.32)$. En déduire la valeur de a.
2) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2;2]$, $f'(x) = -0.34x$.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2;2]$.
4) Calculer l'aire, en m^2, du portail (arrondir au centième).
5) Le client décide d'automatiser le portail si la masse d'un vantail excède $60kg$. Or la densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à $20kg.m^{-2}$. Le portail devra t-il automatisé ?