Séquence 7 : Fonctions affines

I) Fonctions affines : Définition et représentation

1) Cadres algébrique et numérique

> Définition :
> Une **fonction affine** est une fonction qui ,a un nombre x, associe le nombre $mx + p$.
> Si on désigne par f cette fonction, on peut noter $f : x \mapsto mx + p$ ou $f(x) = mx + p$

Exemple :

x				
$f(x) =$				

2) Cadre graphique

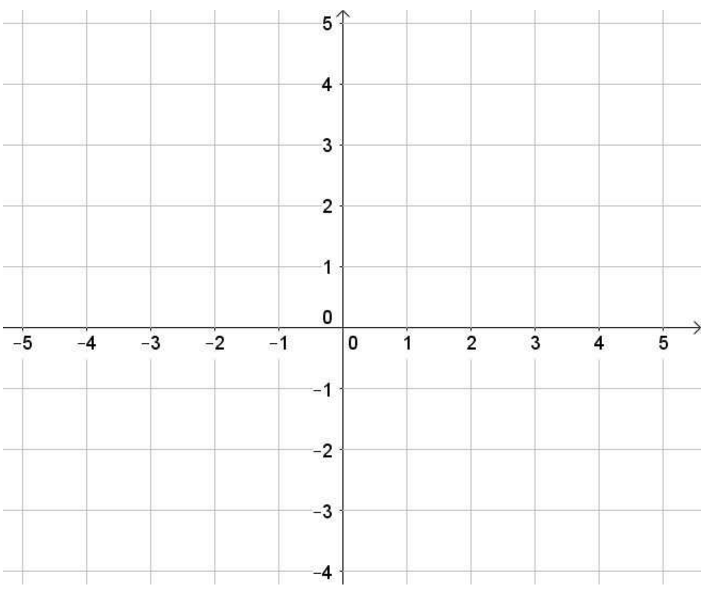
> Propriétés (admises) :
> Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ est une **droite**.
> Autrement dit, c'est l'ensemble des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $y = mx + p$.
>
> La fonction f passe en particulier par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$.
>
> On appelle m le **coefficient directeur** ou la **pente** de la droite.
>
> Le nombre p est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite.

Remarques :

- Si $m = 0$,
  $f(x) = p$ et la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$ et représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $p = 0$,
  $f(x) = mx$ et f est une fonction linéaire traduisant une situation de proportionnalité et représentée par une droite passant par l'origine du repère.

Exemple :

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = 2x + 1$.
Tracer la courbe représentative de la fonction f .



Propriété (admise) :

Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $y = mx + p$ et un point $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ appartient à d si et seulement si $y_M = mx_M + p$.

Exemple :
f est la fonction affine définie par : $f(x) = -3x + 1$.
Les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la courbe représentative de la fonction f?

Pour le point $A\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$:
On remplace x par 2.

$f(2) = -3 \times 2 + 1 = -6 + 1 = -5$.

Or $-5 \neq -4$ donc le point A de coordonnées $(2;-4)$ n'appartient à la courbe représentative de f.

Pour le point $B\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$:

On remplace x par -1.

$f(-1) = -3 \times -1 + 1 = 3 + 1 = 4$.

On a bien obtenu 4 donc le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à la courbe représentative de f.

Propriétés (admises) :
m et p désignent deux nombres, f désigne la fonction affine $f : x \mapsto mx + p$.
Les **accroissements** de x et de $f(x)$ sont **proportionnels**.

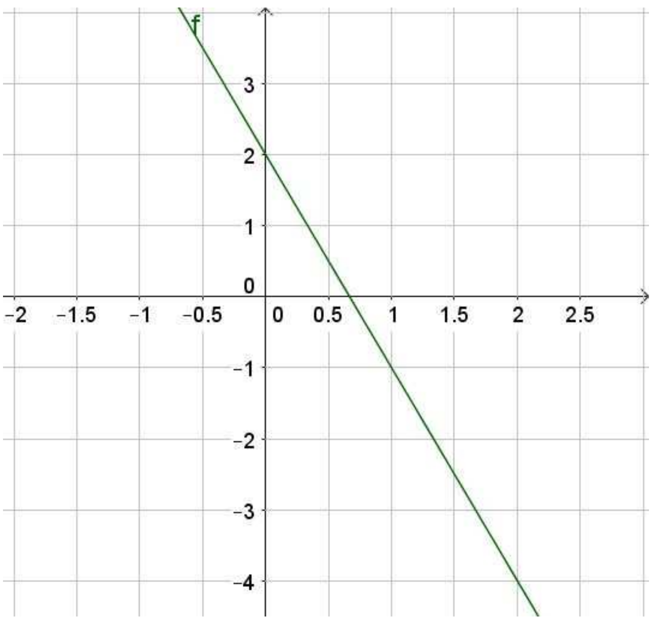
Le coefficient de proportionnalité est m.

On considère deux points $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ appartenant à la courbe représentative de f.

$$\text{Si } x_A \neq x_B \text{ alors } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple :

Déterminer l'expression algébrique de la fonction f.



Exemple :

Soit f une fonction affine telle que $f(3) = 10$ et $f(1) = 2$.

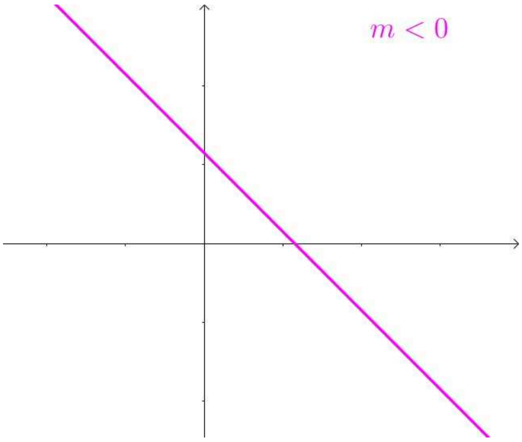
Déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

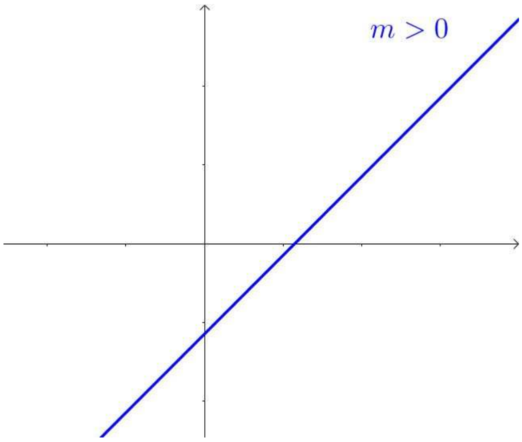
II) Variation et signe d'une fonction affine

1) Variation d'une fonction affine

Propriétés (admises) :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- Si m est négatif alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si m est positif alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.





Exemples :
La fonction f définie par $f(x) = 2x - 1$ est croissante car $2 > 0$.
La fonction g définie par $g(x) = -3x + 8$ est décroissante car $-3 < 0$.

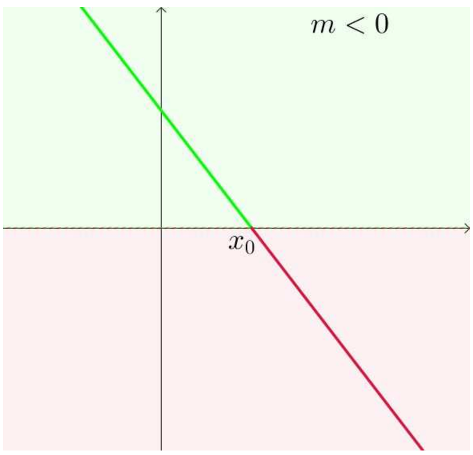
2) Signe d'une fonction affine

Propriétés (admises) :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.
On note x_0 le réel $\dfrac{-p}{m}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Si m < 0,
Sur $]-\infty; x_0[$, $f(x) > 0$
Sur $]x_0; +\infty[$,$f(x) < 0$

On résume cela dans un tableau de signes.

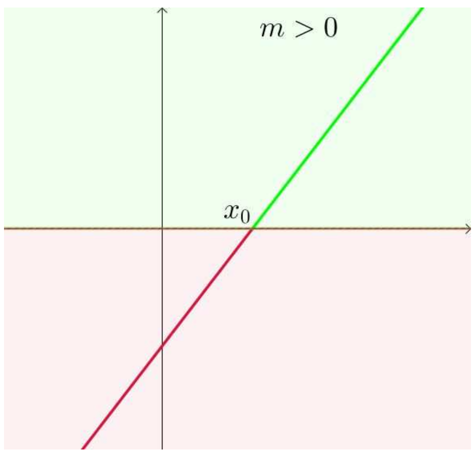
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $mx+p$		$+$	0	$-$	



Si m > 0,
Sur $]-\infty; x_0[$, $f(x) < 0$
Sur $]x_0; +\infty[$,$f(x) > 0$

On résume cela dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $mx+p$		$-$	0	$+$	



Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x+1$. Dresser le tableau de signes de f.

Déterminons $x_0 = \frac{-p}{m} = \frac{-1}{3}$

$m = 3 > 0$,

Sur $\left]-\infty ; \frac{-1}{3}\right[$, $f(x) < 0$

Sur $\left]\frac{-1}{3} ; +\infty\right[$, $f(x) > 0$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x+1$		$-$	0	$+$	

3) Inéquations et fonctions affines

Exemple générique - Méthode 1 : Résoudre une inéquation du type "$(ax+b)(cx+d) > 0$" (respectivement "$(ax+b)(cx+d) < 0$") avec a, b, c et d des réels. $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(2x+8)(-3x+7) < 0$

Étape 1 : Déterminons les valeurs de x qui annulent $2x+8$ et $-3x+7$ pour cela on résout les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 2x+8 &= 0 \\ 2x+8-8 &= 0-8 \\ 2x &= -8 \\ x &= \frac{-8}{2} = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x+7 &= 0 \\ -3x+7-7 &= 0-7 \\ -3x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Étape 2 : Utilisons un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $(2x+8)(-3x+7) < 0$:

x	$-\infty$		-4		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
Signe de $2x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-3x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x+8)(-3x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathscr{S} =]-\infty ; -4[\cup \left]\frac{7}{3} ; +\infty\right[$

Exemple générique - Méthode 2 : Résoudre une inéquation du type "$\dfrac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$" (respectivement "$\dfrac{ax+b}{cx+d} \leqslant 0$") avec a, b, c et d des réels. $a \neq 0$, $c \neq 0$ et $x \neq \dfrac{-d}{c}$.

Résoudre l'inéquation suivante, $\dfrac{2x-1}{3x-4} \geqslant 0$

Étape 1 : Déterminons les valeurs de x qui annulent $2x-1$ et $3x-4$ pour cela on résout les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 0 \\ 2x-1+1 &= 0+1 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-4 &= 0 \\ 3x-4+4 &= 0+4 \\ 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ATTENTION : $\dfrac{4}{3}$ est la valeur interdite!!

Étape 2 : Utilisons un tableau de signes pour résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-1}{3x-4} \geqslant 0$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{2x-1}{3x-4}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$\mathscr{S} = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{4}{3} ; +\infty\right[$

Remarque : Ne pas oublier la double-barre dans le tableau de signes lors du passage au signe du quotient.