Séquence 9 : Fonctions de référence

I) Fonction carré

A) Définition

Définition :
La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Exemple :
Déterminer $f(3)$.

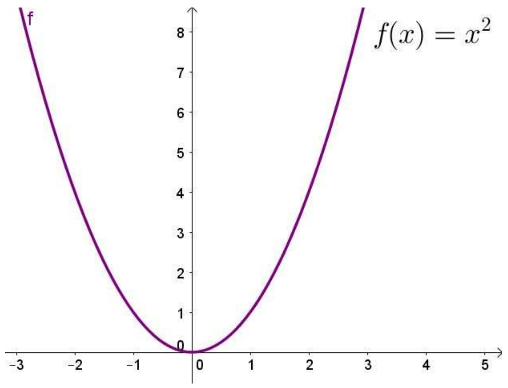
$f(3) = 3^2 = 9$

B) Courbe représentative et parité

Définitions :
- La représentation graphique de la fonction carré s'appelle une parabole.
- L'origine du repère, est le sommet de la parabole.

Table de valeurs et courbe représentative de la fonction carré :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



Propriétés :
- La fonction carré est paire ($f(x) = f(-x)$).
- La représentation graphique de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

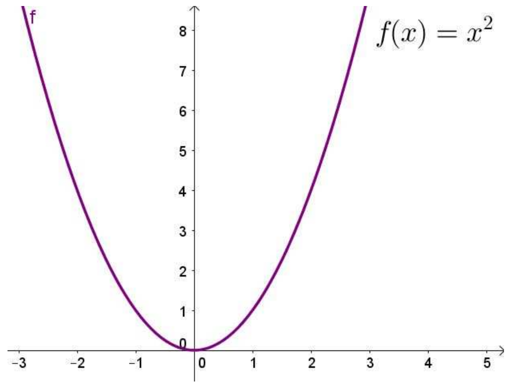
C) Sens de variation

Propriété :
- Sur $]-\infty; 0]$, la fonction carré est strictement décroissante.
- Sur $[0; +\infty[$, la fonction carré est strictement croissante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f		↘	0	↗	

D) Résolutions d'équations et d'inéquations

Propriété :
Soit k un réel, l'équation $x^2 = k$ admet :
- deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$ lorsque $k > 0$;
- une unique solution égale à 0 lorsque $k = 0$;
- aucune solution lorsque $k < 0$.



Exemples :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

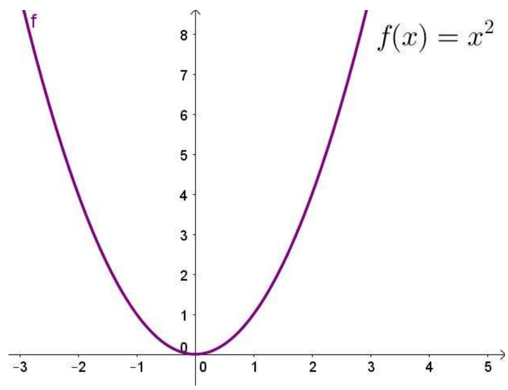
a. $x^2 = 6$ b. $x^2 = 0$ c. $4x^2 = -40$

Propriété :
1) Soit k un réel, l'inéquation $x^2 \leqslant k$ admet comme ensemble des solutions :
- $\mathscr{S} = \left[-\sqrt{k}; \sqrt{k}\right]$ lorsque $k > 0$;
- $\mathscr{S} = \{0\}$ lorsque $k = 0$;
- $\mathscr{S} = \emptyset$ lorsque $k < 0$.

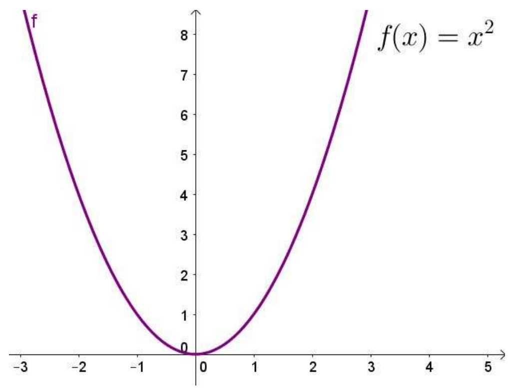
2) Soit k un réel, l'inéquation $x^2 \geqslant k$ admet comme ensemble des solutions :
- $\mathscr{S} = \left]-\infty; -\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k}; +\infty\right[$ lorsque $k > 0$;
- $\mathscr{S} = \{0\}$ lorsque $k = 0$;
- $\mathscr{S} = \mathbb{R}$ lorsque $k < 0$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $x^2 \leqslant 4$



b. $x^2 \geqslant 2$



II) Fonction inverse

A) Définition

Définition :
La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\bigcup]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

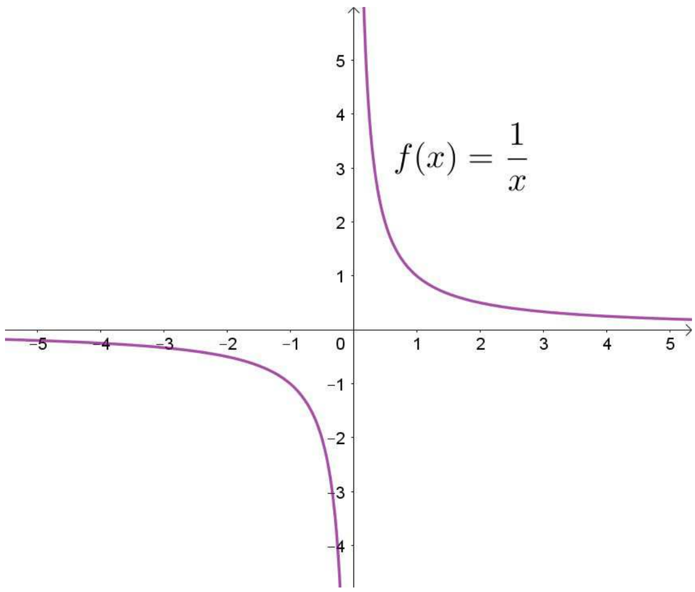
Exemple : $f(4) = \dfrac{1}{4}$

Remarque :
0 n'a pas d'image par la fonction inverse, on dit que 0 est une valeur interdite pour cette fonction.

B) Courbe représentative et parité

Définition :
La représentation graphique de la fonction inverse s'appelle une hyperbole.
Table de valeurs et courbe représentative de la fonction inverse :

x	-3	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	-1	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



Propriétés :
- La fonction inverse est impaire ($f(-x) = -f(x)$).
- La représentation graphique de la fonction inverse est symétrique par l'origine du repère.

C) Sens de variation

Propriété :
- Sur $]-\infty;0[$, la fonction inverse est strictement décroissante.
- Sur $]0;+\infty[$, la fonction inverse est strictement décroissante.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de f	↘	‖	↘

Remarque :
On ne peut pas dire que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[\bigcup]0;+\infty[$

III) Fonction cube

A) Définition

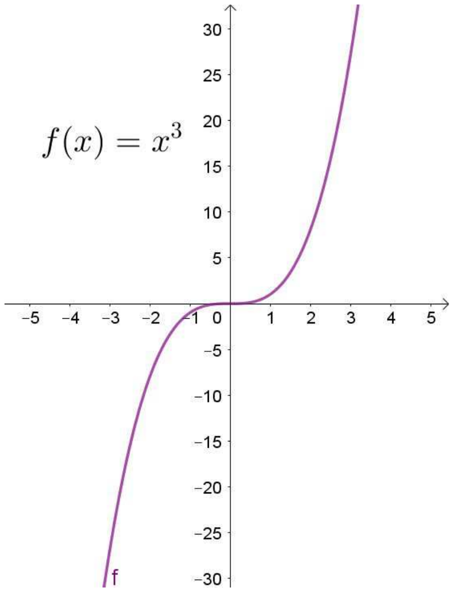
Définition :
La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

Exemple : $f(2) = 2^3 = 8$

B) Courbe représentative et parité

Table de valeurs et courbe représentative de la fonction cube.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27



Propriétés :
- La fonction cube est impaire ($f(-x) = -f(x)$).
- La représentation graphique de la fonction cube est symétrique par l'origine du repère.

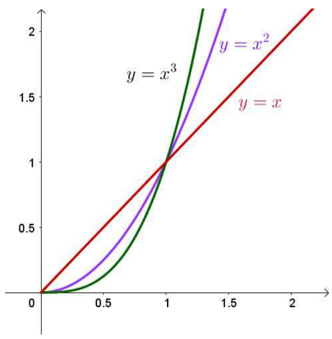
Propriété :

1) Pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, on a :

$$x^3 \leqslant x^2 \leqslant x.$$

2) Pour tout réel x appartenant à $[1;+\infty[$, on a :

$$x \leqslant x^2 \leqslant x^3.$$



C) Sens de variation

Propriété : Sur $\mathbb{R}$, la fonction cube est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de f	$\nearrow$	

IV) Fonction racine carrée

Rappels :

1) La racine carrée d'un nombre réel positif a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif dont le carré vaut a.

2) Soient a et b deux réels positifs.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

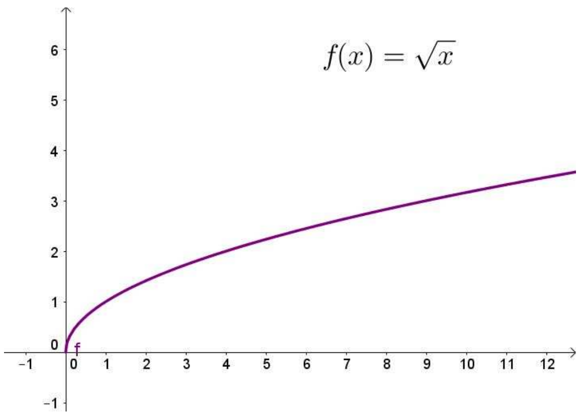
A) Définition

Définition :
La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

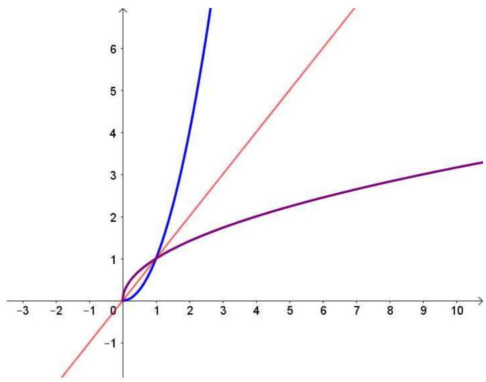
B) Courbe représentative

Table de valeur et courbe représentative de la fonction racine carrée :

x	0	1	2	3	4	5	36
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{36} = 6$



Remarque :



Sur $[0;+\infty[$, les courbes des fonctions carré et racine carrée sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
On dit que les fonctions carré et racine carrée sont des fonctions réciproques.

C) Sens de variation

Propriété :
Sur $[0;+\infty[$, la fonction carré est strictement croissante.

x	0	$+\infty$
Variation de f	0 ↗	

IV) Fonction valeur absolue

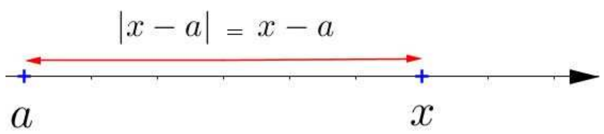
A) Définition

Définition :

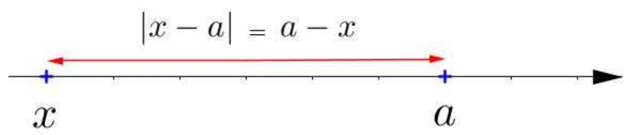
La distance entre deux nombres réels est la différence entre le plus grand et le plus petit.
Pour désigner la distance entre les réels x et a on utilise la notation $|x-a|$.
On lit "valeur absolue de $x-a$".

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{si} \quad x \geqslant a \\ a-x & \text{si} \quad x \leqslant a \end{cases}$$

Si $x \geqslant a$:



Si $x \leqslant a$:



Remarque :
Lorsque $a=0$, la distance entre x et 0 est $|x-0|$ c'est à dire $|x|$, on l'appelle la valeur absolue de x.

Exemples :
$|\pi-3|$ est la distance entre π et 3. Comme $\pi > 3$, on a $|\pi-3| = \pi-3$.
$|\pi-4|$ est la distance entre π et 4. Comme $\pi < 4$, on a $|\pi-4| = 4-\pi$.
$|x-8|$ est la distance entre x et 8.
$|x+7| = |x-(-7)|$ est la distance entre x et -7.

Définition :

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

$$\text{On a } f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \text{ est négatif} \\ x & \text{si } x \text{ est positif (ou nul)} \end{cases}$$

Exemples :
$f(8) = |8| = 8$ car 8 est positif. $f(-2) = |-2| = 2$ car -2 est négatif.

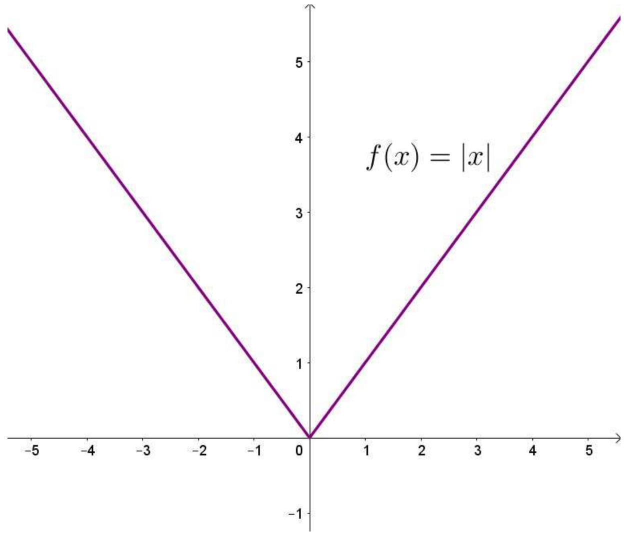
Remarques :
1) Pour tout x, on a $\sqrt{x^2} = |x|$.
2) Pour tout $x \geqslant 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$.

Remarque importante :
La fonction valeur absolue est une fonction affine par morceaux.

B) Courbe représentative et parité

Table de valeur et courbe représentative de la fonction valeur absolue :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\|-3\| = 3$	$\|-2\| = 2$	$\|-1\| = 1$	0	$\|1\| = 1$	$\|2\| = 2$	$\|3\| = 3$



Propriétés :

- La fonction valeur absolue est paire ($f(x) = f(-x)$).
- La représentation graphique de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

C) Sens de variation

Propriété :

- Sur $]-\infty; 0]$, la fonction valeur absolue est strictement décroissante.
- Sur $[0; +\infty[$, la fonction valeur absolue est strictement croissante.

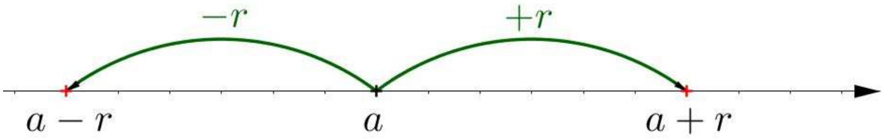
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

D) Équations et inéquations

Propriété :

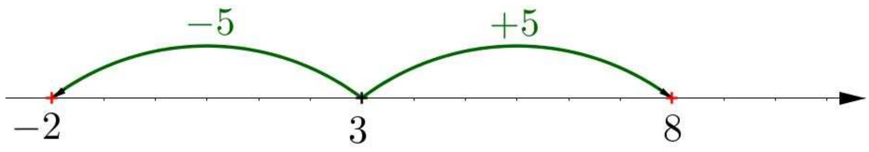
a et r deux nombres réels et $r > 0$.

$|x - a| = r$ si et seulement si $x \in \{a - r\,;\, a + r\}$



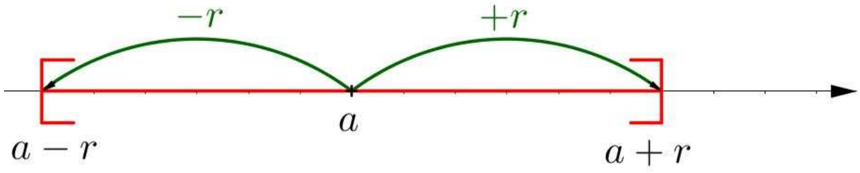
Exemple : Résoudre $|x-3|=5$

Dire que $|x-3|=5$ signifie que la distance entre x et 3 est égale à 5.



$\mathscr{S}=\{-2;8\}$

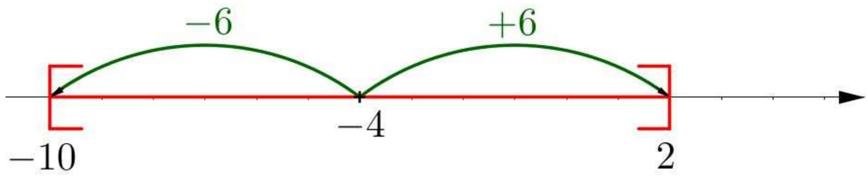
Propriété :
a et r deux nombres réels et $r>0$.
$|x-a|\leq r$ si et seulement si $x\in[\,a-r\,;\,a+r\,]$



Exemple 1 : Résoudre $|x+4|\leqslant 6$

$|x+4|\leqslant 6 \iff |x-(-4)|\leqslant 6$

Dire que $|x-(-4)|\leqslant 6$ signifie que la distance entre x et -4 est inférieure ou égale à 6.



$\mathscr{S}=]-10;2]$

Exemple 2 : Utiliser la notation valeur absolue pour traduire que $x\in[-4;6]$.

Etape 1 : Déterminons le centre de l'intervalle :

$$\frac{-4+6}{2}=1.$$

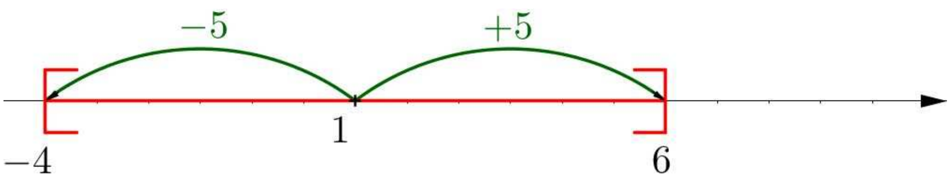
Etape 2 : Déterminons la demi-amplitude (appelée rayon de l'intervalle) :

$$6-(-4)=10$$

L'amplitude de l'intervalle est 10.

$$\frac{10}{2}=5$$

La demi-amplitude est 5.



Ainsi, $x\in[-4;6]$ équivaut à $|x-1|\leqslant 5$.