Séquence 10 : Probabilité

I) Premières définitions

Définition :
Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Exemple :
Lancer un dé cubique et noter le numéro de la face obtenue.

Définitions :
1) Une issue (ou une éventualité) d'une expérience aléatoire est un résultat possible pour cette expérience.
2) L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles. On le note Ω.

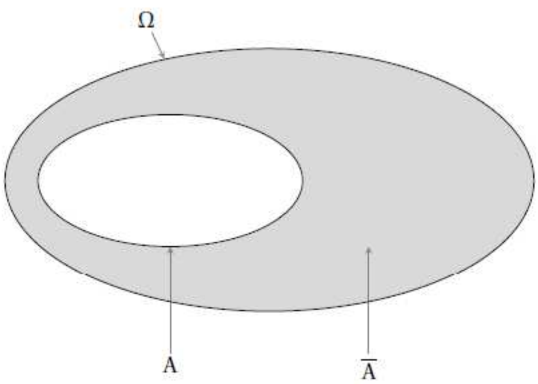
Exemple :
On lance un dé cubique et on note le numéro de la face obtenue.
Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
On note $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Définitions :
1) Un événement A est une partie de l'univers, constitué d'une ou plusieurs issues.
2) Un événement élémentaire est un événement formé d'une seule issue.

Exemple :
On lance un dé cubique et on note le numéro de la face obtenue.
A : "Obtenir un nombre pair." est un événement.
B : "Obtenir 3". est un événement élémentaire.

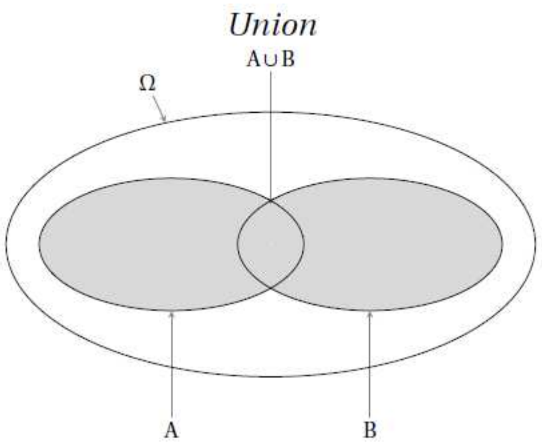
Remarques :
1) L'événement impossible est un événement qui ne peut pas arriver. On le note $\emptyset$.
2) L'événement certain est Ω : toutes les issues le réalisent.

Définition :
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est constitué de toutes les issues de Ω ne réalisant pas A.



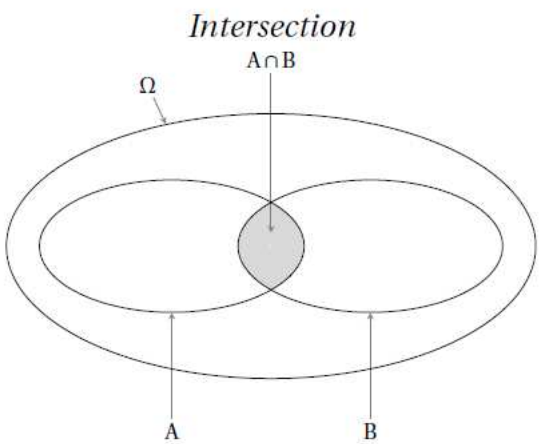
Exemple :
On lance un dé cubique et on note le numéro de la face obtenue.
A : "Obtenir un nombre pair." est un événement.
Son événement contraire est $\overline{A}$: "Obtenir un nombre impair."

Définition :
On considère deux événements A et B d'un univers Ω relatif à une expérience aléatoire.
L'union de A et de B est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B ou les deux.
On le note $A \cup B$ (se lit "A union B").



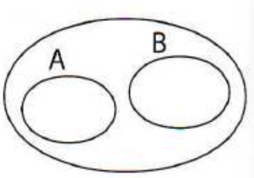
Exemple :
On lance un dé cubique et on note le numéro de la face obtenue.
On considère les événements suivants :
A : "Obtenir un nombre pair."
B : "Obtenir 3."
$A \cup B$: "Obtenir un nombre pair ou obtenir 3."

Définition :
On considère deux événements A et B d'un univers Ω relatif à une expérience aléatoire.
L'intersection de A et de B est l'ensemble des issues qui réalisent A et B.
On le note $A \cap B$ (se lit "A inter B").



Exemple :
On lance un dé cubique et on note le numéro de la face obtenue.
On considère les événements suivants :
A : "Obtenir 1, 2, 3."
B : "Obtenir 3 , 4 , 5 , 6."
$A \cap B$: "Obtenir 1, 2, 3 et obtenir 3 , 4 , 5 , 6." Autrement dit : $A \cap B$: "Obtenir 3."

Définition :
On considère deux événements A et B d'un univers Ω relatif à une expérience aléatoire.
On dit que deux événements A et de B sont incompatibles ou disjoints s'ils n'ont aucune issue en commun. On a alors $A \cap B = \emptyset$.



Exemple :
On lance un dé cubique et on note le numéro de la face obtenue.
On considère les événements suivants :
A : "Obtenir 1."
B : "Obtenir 3."
Les événements A et B sont incompatibles.

II) Modélisation d'une expérience aléatoire

A) Loi de probabilité

Définition :
On note $\Omega = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ On dit que l'on définit une loi de probabilité sur Ω lorsque :
→ à chaque issue x_i , on associe un nombre réel p_i compris entre 0 et 1.
Le nombre p_i est appelé probabilité de l'issue x_i.

→ Ces réels vérifient la relation : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Remarque :
On présente souvent la loi de probabilité à l'aide du tableau ci-dessous (avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n$).

Issue x_i	x_1	x_2	...	x_n
Probabilité p_i	p_1	p_2	...	p_n

B) Choix du modèle

1) De la fréquence à la probabilité

Définition :
Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence f d'une issue va avoir tendance à se stabiliser lorsque n devient grand autour d'une valeur p. On prend alors cette valeur p comme probabilité de l'issue.

2) Équiprobabilité sur un ensemble fini

Définition :
Dans une situation d'équiprobabilité, les n issues de l'expérience aléatoire ont la même probabilité de se produire. La probabilité d'une issue est $\dfrac{1}{n}$. La loi est alors dite équirépartie.

III) Calculs de probabilités

1) Probabilité d'un événement

Définition :
La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Remarques :
1) La probabilité de l'événement impossible $\emptyset$ vaut 0 : $P(\emptyset) = 0$.
2) La probabilité de l'événement certain Ω vaut 1 : $P(\Omega) = 1$.
3) Pour tout événement A, on a : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

Propriété :
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de}\,\Omega}$$

Exemple :
On considère une urne contenant 10 boules, 2 sont blanches, le reste des boules est noir. On prélève au hasard une boule et on note sa couleur.
On considère l'événement A : "Obtenir une boule blanche."
$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Propriété :
Pour tout événement A, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ c'est à dire :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple :
On considère une urne contenant 10 boules, 2 sont blanches, le reste des boules est noir. On prélève au hasard une boule et on note sa couleur.
On considère l'événement A : "Obtenir une boule blanche."
On sait que $P(A) = \frac{1}{5}$. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Propriété (Formule de Poincaré) :
Pour tout événement A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple :
On tire au hasard dans un jeu de 32 cartes et on note la carte obtenue.
On considère les événements : A : "La carte est un valet." et B : "La carte est un pique."
$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ $\quad P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ $\quad P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

Remarque :
Dans le cas où les événements A et B sont incompatibles on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

IV) Construire et utiliser un arbre de probabilité

Définition :
Pour représenter une expérience aléatoire comportant **plusieurs épreuves** , on peut construire un arbre de probabilités.

Remarque :
Il est parfois judicieux d'utiliser un tableau à double entrée pour modéliser une situation.

Propriétés :
La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.

La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Exemple :

Dans une urne contenant 5 boules, il y a deux boules blanches et 3 boules rouges.
On tire une première boule on note sa couleur puis on la remet dans l'urne.
Ensuite, on tire une seconde boule dans l'urne on note sa couleur et on la remet dans l'urne.
On considère les événements suivants :

B : " On tire une boule blanche. "
R : " On tire une boule rouge. "

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches .
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur ?