Séquence 11 : Équations de droites et systèmes d'équations

I) Équation cartésienne de droite

Dans tout cette, on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vecteur directeur d'une droite

Propriété :
Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point.
L'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une droite passant par A.
Le vecteur $\vec{u}$ est un appelé un vecteur directeur de cette droite.

Propriété :
Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

- Les vecteurs directeurs de d sont tous les vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{u}$.
- Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple :

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Soit d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1.5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 6 - 1.5 \times 8 = 12 - 12 = 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On en déduit donc que les droites d et d' sont parallèles.

2) Équation cartésienne de droite

Propriété :
Soient a, b et c trois réels tels que l'un au moins des nombres a et b est non nul.
L'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée une équation cartésienne de la droite d.

Exemple 1 :
$7x + 8y + 9 = 0$ est une équation cartésienne d'une droite que l'on appellera $\mathscr{D}$.
$a = 7$, $b = 8$ et $c = 9$.
$\mathscr{D}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exemple 2 :
On considère la droite $\mathscr{D}$ ayant pour équation cartésienne $10x + 2y + 4 = 0$
Les points $A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient - il à $\mathscr{D}$?
$10 \times (-1) + 2 \times 3 + 4$
$= -10 + 6 + 4$
$= 0$
Les coordonnées du point A vérifient l'équation de la droite $\mathscr{D}$, on en déduit donc qu'il appartient à la droite $\mathscr{D}$.

Les points $B\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ appartient - il à $\mathscr{D}$?
$10\times3+2\times5+4$
$=30+10+4$
$=44$
Les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de la droite $\mathscr{D}$, on en déduit donc qu'il n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

Propriété :
Soient a et b deux réels tels que l'un au moins des nombres a et b est non nul.
Toute droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$.

Exemple : Soit d une droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ et passe par le point $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

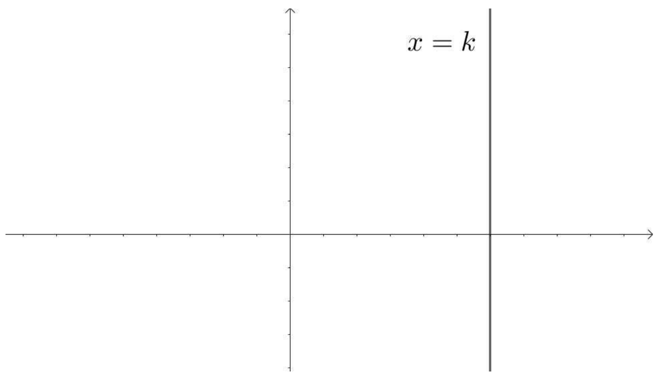
Une équation cartésienne de d est $4x-5y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$
Déterminons c, les coordonnées du point A vérifient l'équation cartésienne de d.
$4\times1-5\times3+c=0$
$4-15+c=0$
$-11+c=0$
$c=11$ Une équation cartésienne de d est $4x-5y+11=0$

Remarque : On peut de nouveau appliquer la propriété suivante.
Soient a, b, c, a', b', c' des réels. d une droite d'équation $ax+by+c=0$ et d' une droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$.
Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

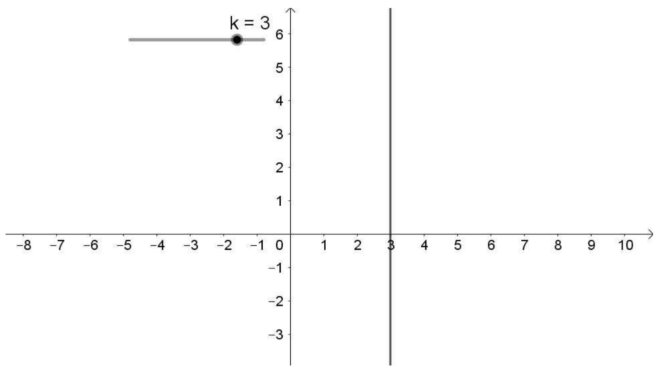
II) Équation réduite de droite

1) Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété :
Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
L'équation cartésienne de la droite d peut s'écrire sous la forme $x=k$, où $k\in\mathbb{R}$



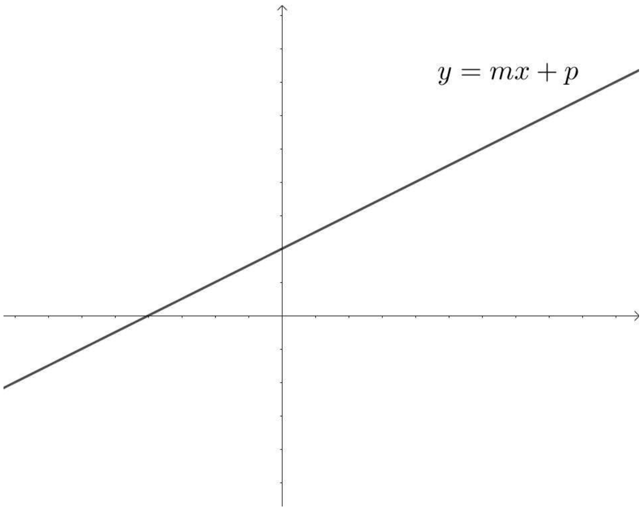
Exemple : L'équation de la droite d représentée dans le repère ci-dessous est : $x=3$.



Remarques :
- Tous les point de d ont la même abscisse k, et tout point d'abscisse k appartient à d.
- Si une droite d est parallèle à l'axe des ordonnées, elle ne représente pas une fonction car un nombre ne peut pas avoir plusieurs images.

2) Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété :
Soit d une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. L'équation cartésienne de la droite d peut s'écrire sous la forme $y = mx+p$, m et p sont deux réels. Cette équation est appelée équation réduite de la droite d.



Remarque :
La droite d est la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$.

Propriétés :

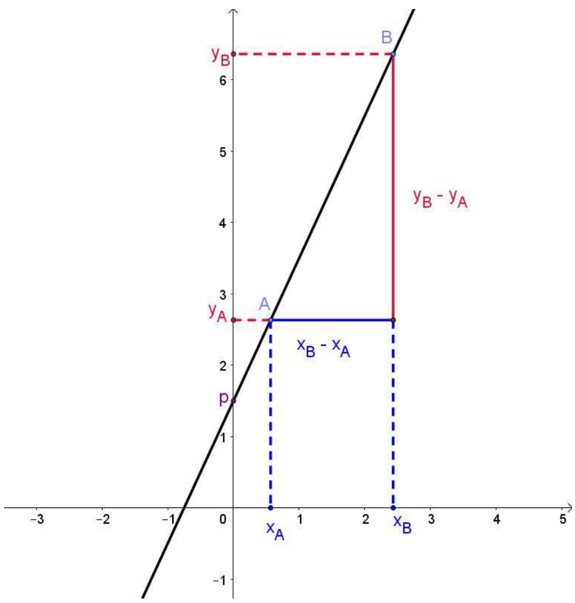
Soit d une droite d'équation $y = mx + p$ et soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points de d.

- m est appelé pente ou coefficient directeur de la droite d.

$$\text{Si } x_A \neq x_B \text{ alors } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

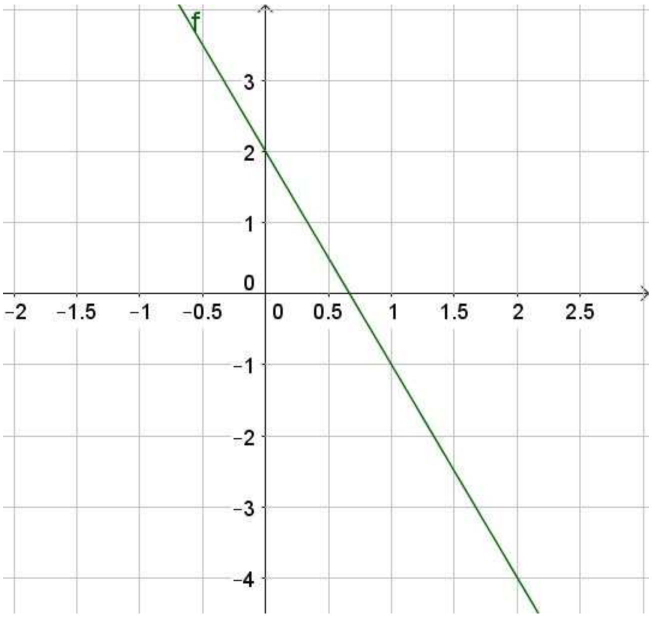
- p est appelé ordonnée à l'origine de la droite d. C'est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées.

$$p = y_A - mx_A \text{ ou encore } p = y_B - mx_B$$



Exemple :

Déterminer l'équation réduite de la droite tracée dans le repère ci-dessous.



Exemple :

Soit d une droite passant par $A\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'équation réduite de la droite d. .

Propriété :
Soient m et m' deux réels.
Deux droites de coefficients directeurs m et m' sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

Exemple :
Soit d la droite d'équation $y = 3x + 1$ et d' la droite d'équation $y = 3x - 2$.
Les droites d et d' sont parallèles car ces deux droites sont de coefficients directeurs 3.

III) Systèmes d'équations

1) Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Définition :
Un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y peut s'écrire sous la forme
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés.

Exemple :
$$\begin{cases} 7x + 9y = 10 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$
est un système de deux équations à deux inconnues.

Définition :
Une solution d'un système de deux équations à deux inconnues est un couple de valeurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour lequel les deux égalités sont vraies simultanément.

Exemple :

On considère le système $\begin{cases} -2x+2y=14 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$

a) Montrez que le couple $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ n'est pas une solution de ce système.

$-2\times 2+2\times 9=-4+18=14$	$2\times 2+3\times 9=4+27=31$ $31\neq 11$

On peut en déduire que le couple $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ n'est pas une solution de ce système.

b) Montrez que le couple $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est solution de ce système.

$-2\times -2+2\times 5=4+10=14$	$2\times -2+3\times 5=-4+15=11$

On peut en déduire que le couple $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est une solution de ce système.

Définition :
Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est déterminer tous les couples solutions du système.

Méthode 1 : Résoudre un système par la méthode de substitution

Résoudre le système $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ -2x+y=8 \end{cases}$

Méthode 2 : Résoudre un système par la méthode de combinaison

Résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x+5y=-13 \end{cases}$

2) Lien entre les droites et les systèmes

Propriété :
Soient les droites d d'équation $ax+by+c=0$ et d' d'équation $a'x+b'y+c'=0$. Soit le système $\mathscr{S}$ $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Un point M appartient à d et à d', si et seulement si le couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de ses coordonnées est solution du système $\mathscr{S}$.

- Si d et d' sont sécantes, elles ont un unique point d'intersection.
  Le système $\mathscr{S}$ a une solution unique, le couple formé par les coordonnée de leur point d'intersection.
- Si d et d' sont strictement parallèles, elles n'ont aucun point d'intersection.
  Le système $\mathscr{S}$ n'a aucune solution.
- Si d et d' sont confondues, elles ont une infinité de points en commun.
  Le système $\mathscr{S}$ a une infinité de solutions.