Séquence 1 : Suites arithmétiques

1) Rappels

Définition :
Soit u_0 un réel. Une suite (u_n) de premier terme u_0 est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$ est une suite arithmétique de raison 5.

2) Moyenne arithmétique

Définition :
La moyenne arithmétique de deux nombres est la demi - somme de ces deux nombres.
Autrement dit, soit a et b deux nombres, la moyenne arithmétique de a et b est le nombre $\dfrac{a+b}{2}$.

Propriété admise :
Trois nombres a, b, et c sont, dans cette ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si le terme du milieu b est égal à la moyenne arithmétique des deux autres termes a et c.

Exemple :
Les nombres 23, 35 et 47 sont-ils les termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

$\dfrac{23+47}{2} = 35$

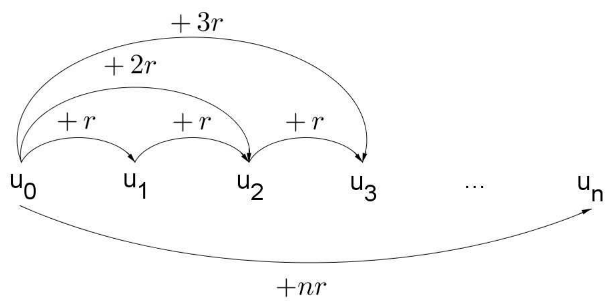
On en déduit donc que ces nombres sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
On pourrait également remarquer que $35 - 23 = 47 - 35$

3) Formule explicite d'une suite arithmétique.

Propriété admise :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Illustration :



Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, on a :

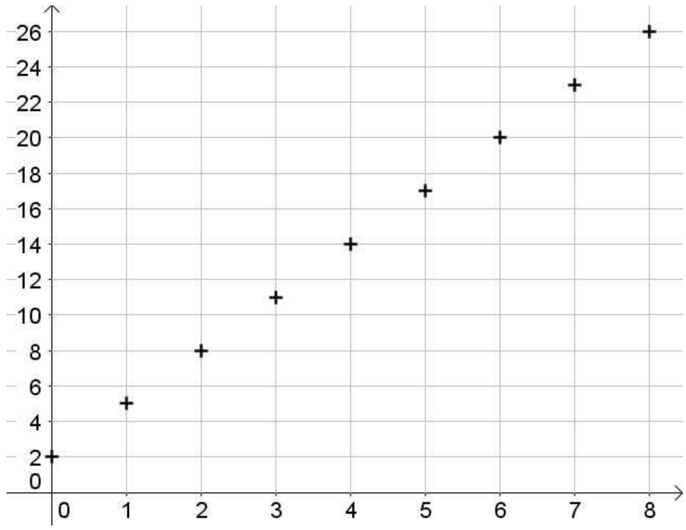
$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.
Exprimer u_n en fonction de n.

$u_n = u_0 + nr = 2 + n \times 3 = 2 + 3n$

Représentations de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	5	8	11	14	17	20	23	26



Remarque :
On dit qu'un phénomène, dont l'évolution est représentée par une suite de nombres, est à croissance linéaire si la suite qui le modélise est une suite arithmétique.

4) Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique.

Notation :
On peut noter $u_0 + u_1 + ... + u_n$ sous la forme : $\sum_{k=0}^{n} u_k$

Propriété :
Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, la somme S des $n+1$ premiers termes est :

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Plus généralement , on a :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$.
Déterminer la somme des 17 premiers termes.

Étape 1 : Identification du premier terme :

Le premier terme est égal à 5.

Étape 2 : Déterminons la valeur du dernier terme u_{16} :

$u_{16} = u_0 + r \times 16 = 5 + 2 \times 16 = 37$

Étape 3 : Identification du nombre de termes :

On veut calculer la somme de 17 termes.

Étape 4 : Calcul de la somme :

$$S = 17 \times \frac{5+37}{2} = 357$$

La somme des 17 premiers termes de la suite (u_n) est égale à 357.

Conséquence :
La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est :

$$S = 1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple :
Déterminer la somme des 35 premiers entiers.

Étape 1 : Identification du premier terme :

Le premier terme est égal à 1.

Étape 2 : Identification du dernier terme :

Le dernier terme est égale à 35.

Étape 3 : Identification du nombre de termes :

On veut calculer la somme de 35 termes.

Étape 4 : Calcul de la somme :

$$S = 35 \times \frac{1+35}{2} = 35 \times \frac{36}{2} = 630$$

La somme des 35 premiers entiers est égale à 630.