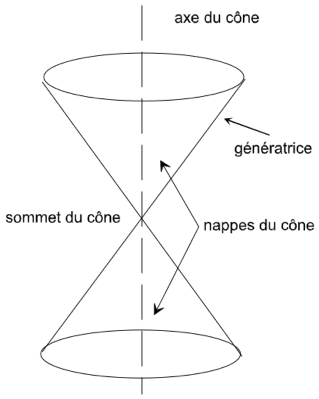
Séquence 10 : Géométrie dans l’espace - Coniques

1) Définitions

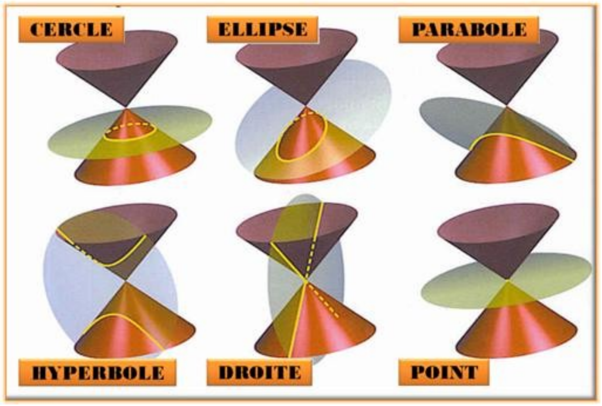
Définition :
On considère une droite de l’espace et une courbe. La rotation de la courbe autour de la droite (appelée axe de révolution) génère un solide de révolution.
Une droite sécante en un point O à l’axe de révolution génère un cône de centre O.

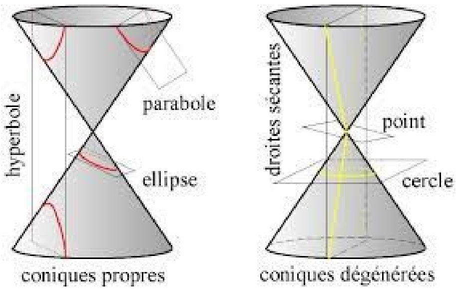


Remarques :
a) Une droite strictement parallèle à l'axe de révolution génère un cylindre.
b) Un cercle de centre O situé sur l'axe et dans un plan contenant l'axe génère une sphère.
c) Une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe de révolution génère un paraboloïde.
d) En grec « kônos » signifiait une pomme de pain.

2) Les coniques

On considère un cône de centre O et de génératrice (d) et un plan P. On s'intéresse à l'intersection du cône et du plan. On rencontre les différentes situations :





Si le plan P passe par O :
→ s'il contient une génératrice, alors l'intersection est la génératrice.
→ s'il ne contient pas une génératrice, alors l'intersection est le point O.
→ s'il contient l'axe du cône, alors l'intersection est formée de deux droites sécantes en O.
Ces courbes sont appelées des coniques (dégénérées).

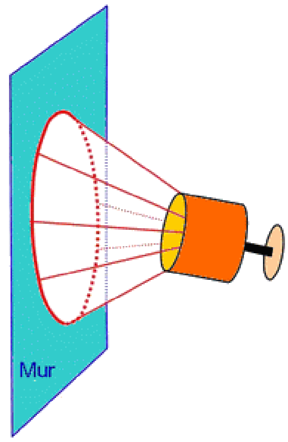
Si le plan P ne passe pas par O :
→ s'il est perpendiculaire à l'axe du cône, alors l'intersection est un cercle.
Sinon :
l'intersection est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant l'angle formé par l'axe du cône et le plan.
Ces courbes sont appelées des coniques (non dégénérées ou propre).

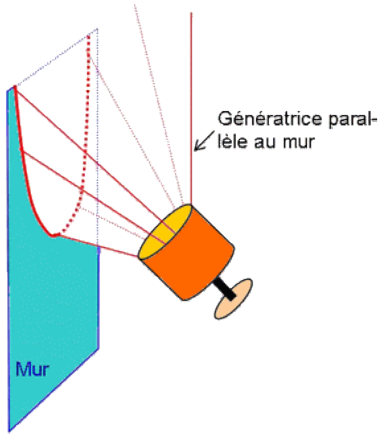
Pourquoi les coniques s'appellent-elles ellipse, parabole et hyperbole ?
Les mots ellipse, hyperbole et parabole ont été transcrits par Johannes Kepler (1571-1630) des mots grecs elleipsis, huperbolê et parabolê, noms qui avaient été donnés par Aristée (IVe siècle avant J.C.) et popularisés par Apollonius de Perge (env. 262 - 190 av. J.C.). Le mot grec elleipsis a été crée à partir du verbe elleipein qui signifie « manquer » (éclipse à la même origine), tandis que huperbolê et parabolê sont des mots grecs existant signifiant l'un « excès » et l'autre ressemblance ou « juste adéquation ». Le suffixe bolê vient du verbe ballein signifiant « lancer » , (cf. le discobole et la balistique).
Les trois mots ellipse, parabole et hyperbole représentent aussi des figures de rhétorique, en bonne adéquation avec leur étymologie : une ellipse est une formule raccourcie (comme chacun son tour à la place de chacun doit attendre son tour), une parabole est un récit allégorique, une hyperbole est une formule exagérée (comme mourir de rire).
En mathématiques, une ellipse manque aussi de quelque chose, une hyperbole présente un excès, mais de quoi ? C'est là que les réponses divergent...
Pour le dictionnaire historique de la langue française, une ellipse manque… de perfection par rapport à un cercle. Bien que plausible, cette interprétation tue la symétrie ellipse - hyperbole, autour de la parabole.

3) <u>Expériences</u>

Pour comprendre le principe des sections coniques, il suffit de réaliser dans la pénombre une expérience simple à l'aide d'une lampe à abat-jour.
En inclinant l'abat-jour face à un mur, on projette un **cône** de lumière. Le mur est assimilé à un plan de coupe.

<u>1er cas :</u>
Toutes les génératrices du cône rencontrent le mur.
Le cône de lumière se projette en une **ellipse**.
Dans le cas particulier où l'axe du cône est perpendiculaire au mur, l'ellipse est un cercle.





<u>2ème cas :</u>
Une génératrice du cône est parallèle au mur.
Le cône de lumière se projette en une **parabole**.

<u>3ème cas :</u>
Des génératrices du cône ne rencontrent pas le mur et dans ce cas un deuxième cône de lumière intercepte le mur.
Les cônes de lumière se projettent en une **hyperbole**.