Séquence 1 : Suites numériques (Partie 1)

I) Modes de génération d'une suite

1) Notion de suite numérique

> Définition :
> Une suite numérique est une fonction $u : n \mapsto u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
> Le nombre réel $u(n)$, noté u_n (se lit "u indice n"), est appelé le terme de rang n ou le terme général de la suite. On note cette suite (u_n).

Remarques :

- La suite (u_n) peut être représentée graphiquement par le nuage de point de coordonnées $(n; u_n)$.
- Ne pas confondre le terme général de la suite u_n et la suite (u_n).
- Le premier terme d'une suite (u_n) est généralement u_0 mais il est possible de rencontrer des suites qui commencent à u_1 ou à un indice supérieur.

Exemple :
On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : $1, 3, 5, 7, \ldots$
On note (u_n) cette suite de nombres tel que : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7, \ldots$

2) Suite définie par une formule explicite

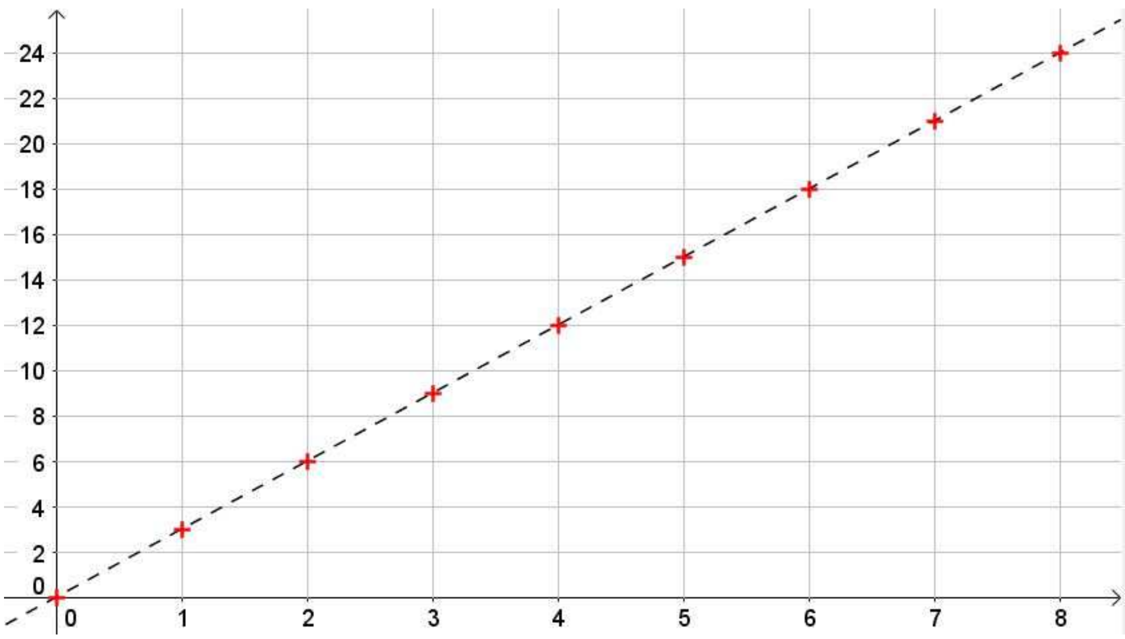
> Définition :
> On définie une suite par une formule explicite lorsque chaque terme de la suite s'exprime à partir de son rang n.

Exemple :

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n$
Ainsi :
$u_0 = 3 \times 0 = 0$
$u_1 = 3 \times 1 = 3$
$u_2 = 3 \times 2 = 6$
$u_{100} = 3 \times 100 = 300$

```
def suite(n) :
    u = 3*n
    return u
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	0	3	6	9	12	15	18	21	24



3) Suite définie par une relation de récurrence

Définition :
On définit une suite par une relation de récurrence lorsque chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un (ou plusieurs) terme qui le précède.

Remarque :
Il ne faut pas confondre u_{n+1} qui désigne le terme de rang $n+1$ et u_n+1 qui désigne le terme u_n auquel on ajoute 1.

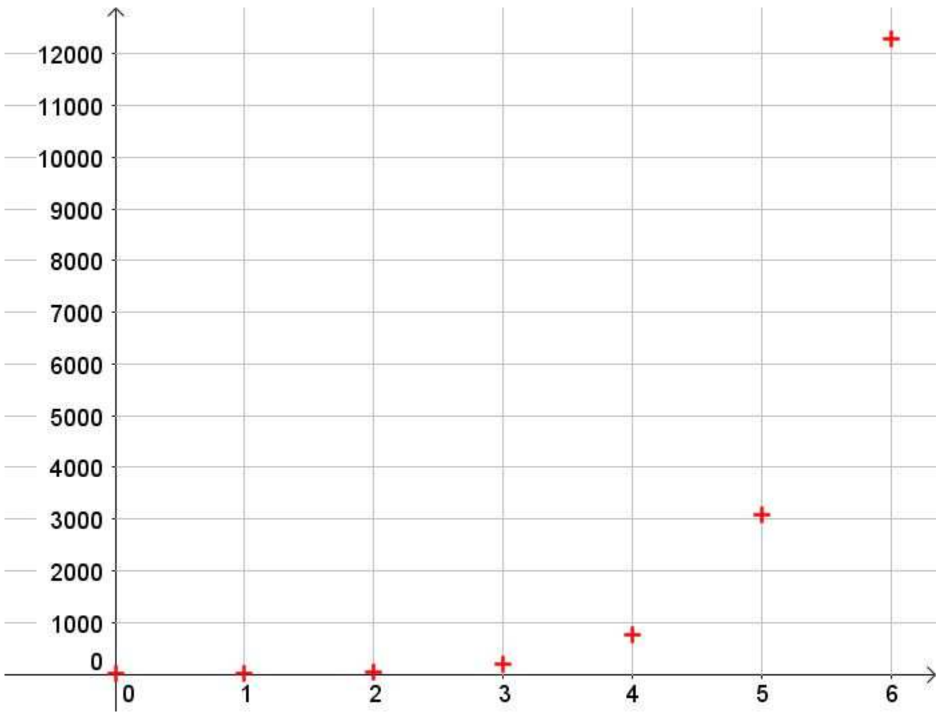
Exemple 1 :

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \end{cases}$

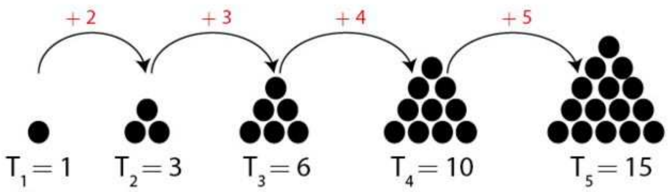
```python
def suiterec(n) :
    u = 2
    for i in range (1 , n + 1 ) :
        u = 4*u + 3
    return u
```

$u_0 = 2$
$u_1 = 4 \times u_0 + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11$
$u_2 = 4 \times u_1 + 3 = 4 \times 11 + 3 = 47$
Pour déterminer u_{100}, il faudrait déterminer
u_0 , u_1 , ... , u_{99}.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	11	47	191	767	3071	12287	49151	196607



Exemple 2 :
On considère la suite (T_n), la suite des nombres triangulaires dont le procédé est illustré ci-dessous :



Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

$T_2 = T_1 + 2$
$T_3 = T_2 + 3$
$T_4 = T_3 + 4$
$T_5 = T_4 + 5$
En poursuivant le procédé, on peut en déduire que :

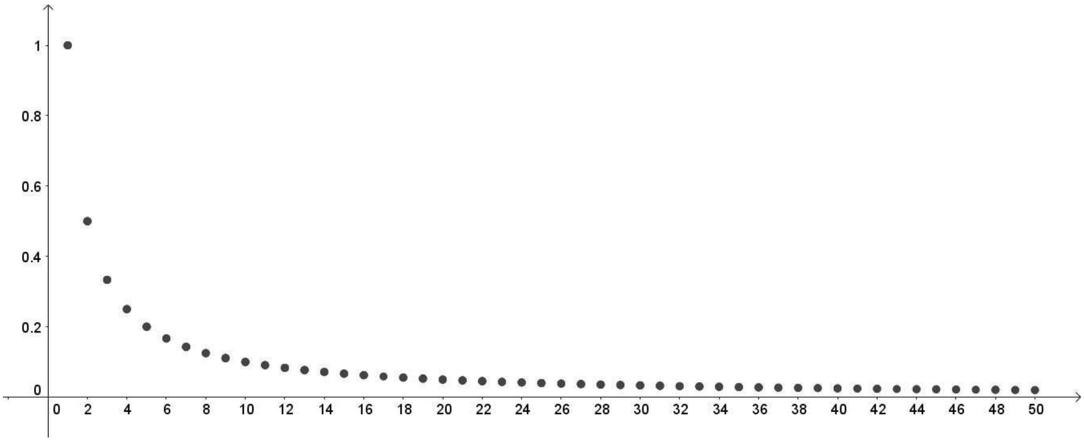
$$T_{n+1} = T_n + n + 1$$

II) Notion de limite

1) Limite finie

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

n	1	20	400	1000	50000	400000	1000000
$U_n = \dfrac{1}{n}$	1	0,05	0,0025	0,001	0,00002	0,0000025	0,000001



Les termes u_n semblent se rapprocher autant que l'on veut de 0 (valeur limite finie) lorsque n prend des valeurs suffisamment grandes.

On dit que la suite u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ ou encore que (u_n) converge vers 0.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Propriété :
Soit un entier $k \geqslant 1$, on a :

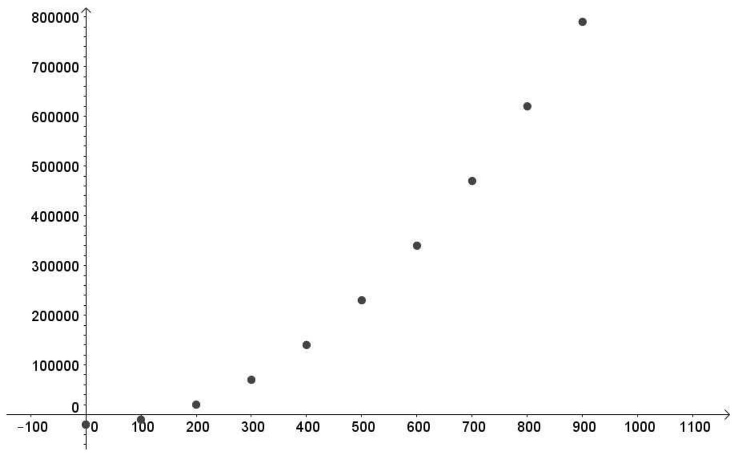
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Remarque : Lorsqu'une suite converge sa limite est finie.

2) Limite infinie

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - 20000$.

n	1	20	500	1000	50000	75000	99999
$V_n = n^2 - 20000$	1	400	250000	1000000	2500000000	5625000000	9999800001

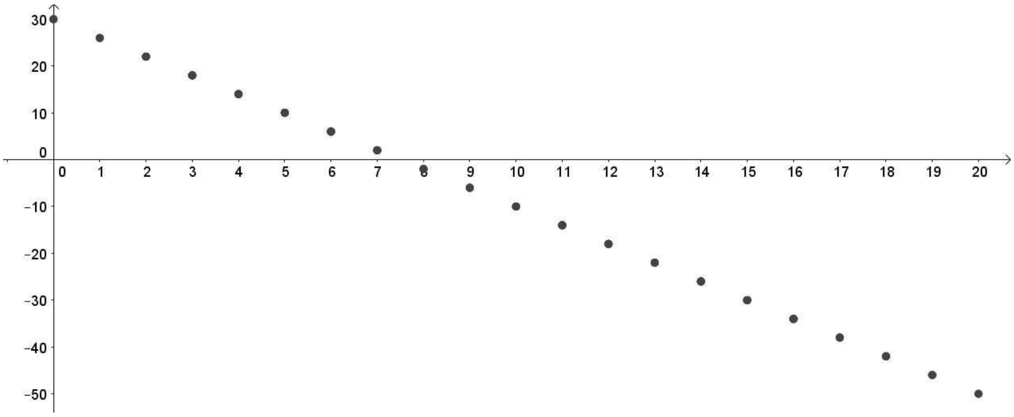


Les termes v_n semblent devenir aussi grands que l'on veut, lorsque n prend des valeurs suffisamment grandes.

On dit que la suite (v_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

On considère la suite (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $z_n = -4n + 30$.

n	1	20	500	1000	50000	400000	100000
$Z_n = -4n + 30$	26	-50	-1570	-3970	-199970	-1599970	-3999970



Les termes z_n semblent devenir aussi grands (en valeur absolue) que l'on veut dans les négatifs lorsque n prend des valeurs suffisamment grandes.

On dit que la suite (z_n) tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\infty$.

Propriété :
Soit un entier $k \geqslant 1$, on a :

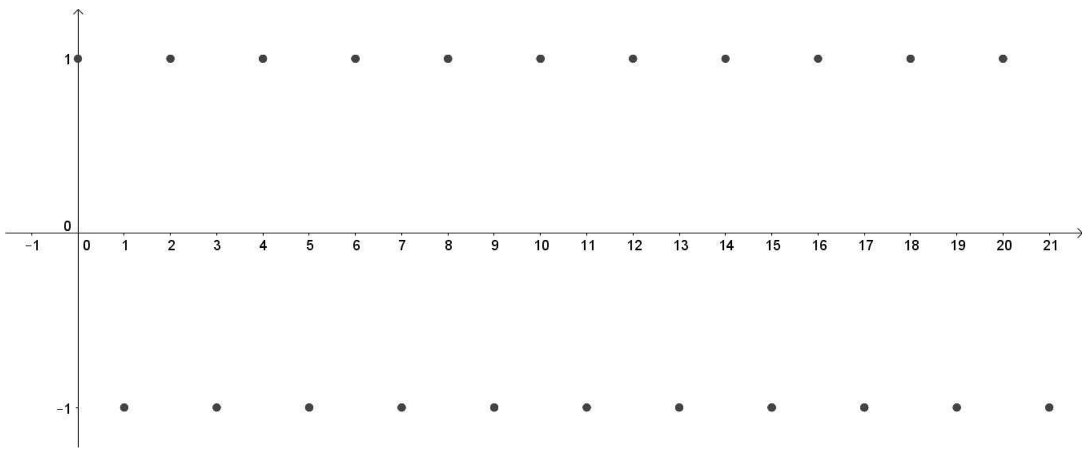
$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$

3) Pas de limite

On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$.

Il existe des suites qui n'ont pas de limite comme la suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n$.

n	1	2	3	4	23	1000	100003
$W_n = (-1)^n$	-1	1	-1	1	-1	1	-1



III) Limites et opérations

1) Somme

Propriété :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, soient l et l' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Remarque :
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors on ne peut pas conclure sur la limite de $(u_n + v_n)$ grâce à cette propriété : on dit qu'on a une forme indéterminée.
Il est nécessaire de transformer l'écriture (factorisation, ...) pour lever l'indétermination.

2) Produit

Propriété :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, soient l et l' deux réels.

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$L L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

3) Quotient

Propriété :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, (v_n) ne s'annulant pas et de signe constant à partir d'un certain rang.
Soient l et l' deux réels.

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

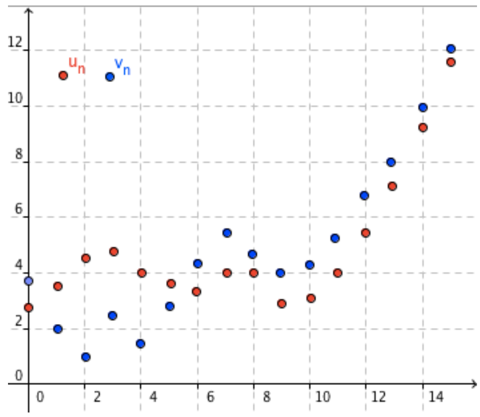
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L\neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

IV) Limites et comparaisons

1) Limite infinie

Propriété :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telle que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$



Propriété :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telle que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

2) Limite finie

Propriété :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers l et l'.
On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$. On a alors $l \leqslant l'$.

Remarque :
Si, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ et $u_n < v_n$ alors $l \leqslant l'$.
On peut prendre par exemple $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Théorème d'encadrement dit théorème des gendarmes :
Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l, alors (v_n) converge vers l.