Séquence 2 : Lois discrètes (Partie 1)

I) Notion de variable aléatoire

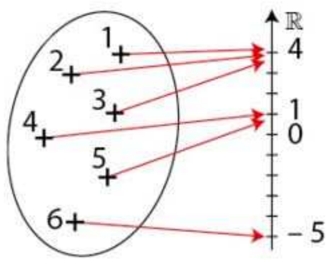
A) Variable aléatoire

Définition :
Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Remarques :
- Comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X est fini. On parle de variable aléatoire discrète.
- On nomme en général les variables aléatoires avec une lettre majuscule.

Exemples :
On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Lorsque la face supérieure indique :

- 1, 2 ou 3, on gagne 4 €
- 4 ou 5, on gagne 1 €
- 6, on perd 5 €



On définie une variable aléatoire réelle X qui au numéro obtenu associe le gain, en euro, du joueur. Cette variable aléatoire prend les valeurs -5 ; 1 ; 4.

Notations :
Soit a un nombre réel. On note :
- $\{X = a\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend la valeur a".
- $\{X \leqslant a\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à la valeur a".

B) Loi de probabilité

Définition :
Ω est l'ensemble fini des issues d'une expérience aléatoire.
X est une variable aléatoire réelle définie sur Ω qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$), la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$.

Remarque :
On présente souvent la loi de probabilité de la variable aléatoire X à l'aide du tableau ci - dessous (avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$).

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemples :
En reprenant l'exemple précédent, la loi de probabilité de la variable aléatoire est donné par le tableau suivant.

x_i	-5	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

C) Espérance

La notion d'espérance est introduite par Christian Huygens dans son Traité du hasard de 1656 sous le nom de "valeur de la chance".

Définition :
On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et qui prend n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant.

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n$$

Exemples :
On reprend l'exemple précédent et on rappelle que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-5	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = -5 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2}$
$E(X) = \frac{-5}{6} + \frac{1}{3} + \frac{4}{2}$
$E(X) = \frac{-5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{12}{6} = \frac{9}{6} = 1.5$
L'espérance est égale à 1.5 cela signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 1.5 €.

II) Loi uniforme

Définition :
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\{1; 2; \dots; n\}$.
On dit que X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$ lorsque pour tout $k \in \{1; 2; \dots; n\}$:

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Exemple :
Un professeur souhaite interroger un élève au hasard dans sa classe de Terminale qui contient 24 élèves. Pour cela, il considère la variable aléatoire X qui, à chaque élève, associe son rang dans l'ordre alphabétique de la classe.
Il annonce alors à voix haute voix et de manière aléatoire une valeur de X.
L'univers Ω est l'ensemble des 24 élèves. Aucun élève n'a raison d'être plus souvent interrogé qu'un autre. La variable X prend pour valeur $\{1; 2; \dots; 24\}$. Pour tout entier k compris entre 1 et 24 (inclus), $P(X = k) = \frac{1}{24}$.
X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; 24\}$.

Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1; 2; ...; n\}$.
L'espérance de X est : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$

Exemple :
En reprenant la situation précédente.
On sait que X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; ...; 24\}$.
$E(X) = \dfrac{24+1}{2} = 12.5$

Remarque :
On interprète l'espérance mathématique comme étant une moyenne théorique.
Si on réalise un grand nombre de fois, à l'identique, l'expérience aléatoire, la moyenne statistique des valeurs obtenues par la variable aléatoire sera très proche de l'espérance.

III) Loi de Bernoulli

Définition :
Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire n'ayant que deux issues (souvent appelées "Succès" et "Échec") de probabilités respectives p et $1-p$ avec $p \in [0; 1]$.

Exemple :
A la réception d'une commande d'un lot de pièces de boulons. 98 % des pièces sont conformes au cahier des charges, on prélève une pièce du lot. Cette épreuve aléatoire débouche sur deux issues :
- La pièce est conforme ce qui peut être considéré comme un succès,
- La pièce n'est pas conforme ce qui peut être considéré comme un échec.

Définition :
Soit p un réel de l'intervalle $[0; 1]$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si :
- X prend la valeur 0 si l'issue de l'épreuve est l'Echec ou la valeur 1 si l'issue de l'épreuve est le Succès ;
- $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

Exemple :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes et on appelle succès S : "Obtenir un coeur". X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Quelle est la loi suivie par X ?

Cette expérience est un expérience aléatoire à deux issues.
Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli. Un jeu de 32 cartes contient 8 cartes Coeur, donc la probabilité de succès est $p = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4} = 0.25$. X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0.25 .

Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance de X est $E(X) = p$.
La variance de X est $V(X) = p(1-p)$.
L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)}$.

IV) Loi binomiale

A) Définition

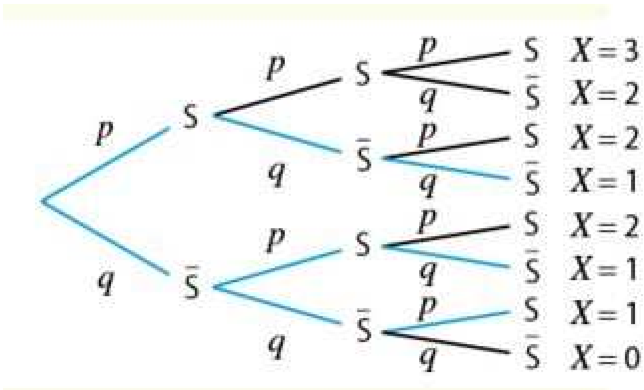
Définition :
La répétition de façon identique et indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre p donne un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus suit alors la loi binomiale de paramètres n et p. On note :

$$X \sim \mathscr{B}(n; p)$$

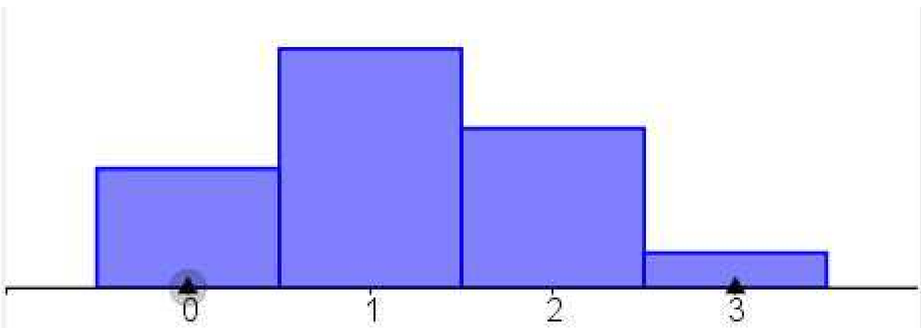
Exemples :
Un magasin propose à ses clients sa nouvelle carte de fidélité. On suppose que la probabilité qu'un client l'accepte est de 0.4. Lorsqu'un client se présente à la caisse, il peut l'accepter ou la refuser. 3 clients se présentent à la caisse, chacun fait son choix indépendamment des autres.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X en précisant ses paramètres.

Résolution :
On effectue la répétition de 3 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, avec une probabilité p de succès égale à 0.4. X suit la loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = 0.4$. On écrit $X \sim \mathscr{B}(3; 0.4)$
On peut modéliser la situation précédente avec l'arbre pondérée suivant :



Voici la représentation graphique de la loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = 0.4$



k	P(X = k)
0	0.216
1	0.432
2	0.288
3	0.064

B) Espérance , variance et écart-type

Propriété :
Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètre n et p.
L'espérance de X est $E(X) = n \times p$.
La variance de X est $V(X) = np(1-p)$.
L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple :
28 % des 14-20 ans aiment regarder Netflix.
On assimile le fait de choisir au hasard 10 personnes de cette tranche d'âge à un tirage aléatoire avec remise.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque groupe de 10 personnes le nombre de personnes qui aiment regarder Netflix. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.28$.

Déterminer l'espérance , la variance et l'écart-type de X.

Résolution :

$E(X) = 10 \times 0.28 = 2.8$.

Si on formait aléatoirement un grand nombre de groupes de 10 personnes de tranche d'âge 14-20 ans, il y aurait en moyenne environ 2.8 personnes aimant regarder Netflix.

$V(X) = 10 \times 0.28 \times (1-0.28) = 2.016$

La variance de X est de 2.016

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.016} \approx 1.42$

L'écart type est d'environ 1.42

Exercice type

Lors d'un match de basket, Nando de Colo a obtenu la possibilité d'exécuter trois lancers francs.
La probabilité qu'il réussisse un lancer est égale à $p = 0.7$.
On suppose que cette probabilité reste identique et ceci indépendamment du résultat précédent.

Soit S l'événement "le lancer est réussi." et E l'événement "le lancé est manqué".
On note X la variable aléatoire qui, à chaque série de trois lancers francs, associe le nombre de succès.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
2) Représenter graphiquement cette loi.
3) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
4) a) Déterminer $P(X = 3)$.
4) b) Déterminer $P(X \geqslant 2)$.
5) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Fiche tuto : Calculer de probabilités avec la calculatrice

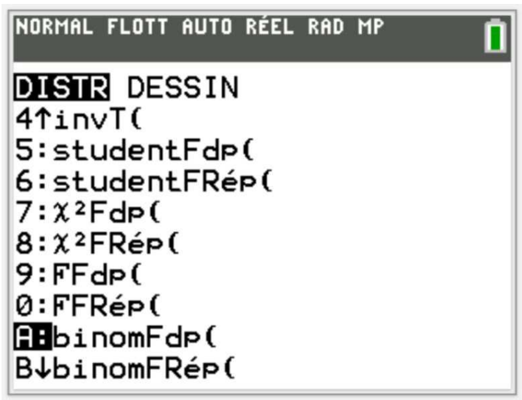
70 % des Français possède un compte sur un réseau social.
On assimile le fait de choisir au hasard 10 personnes à un tirage aléatoire avec remise.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque groupe de 10 personnes le nombre de personnes qui possède un compte sur un réseau social. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.70$.
Déterminer $P(X = 6)$ et $P(X \leqslant 2)$.

A) Calculer $P(X = k)$ à l'aide de la calculatrice

Déterminons $P(X = 6)$ à l'aide de la calculatrice.

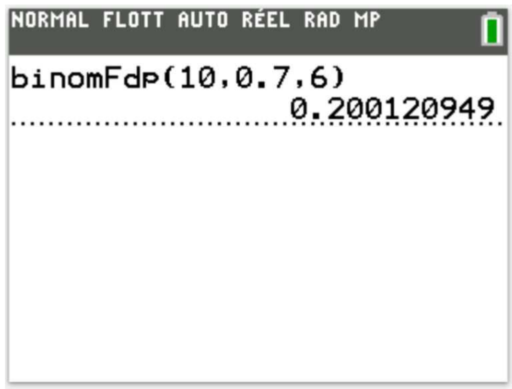
Étape 1 :

Étape 2 :



Étape 3 :

Étape 4 :

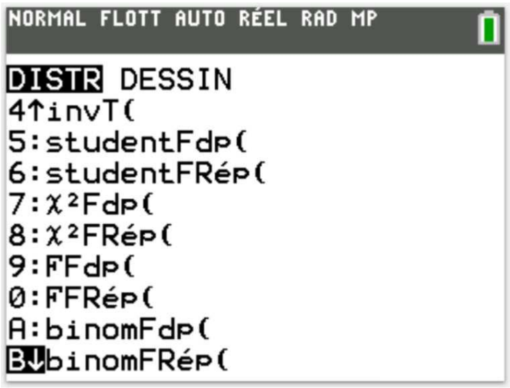


B) Calculer $P(X \leqslant k)$ à l'aide de la calculatrice

Déterminons $P(X \leqslant 2)$ à l'aide de la calculatrice.

Étape 1 :

Étape 2 :



Étape 3 :

Étape 4 :