Séquence 3 : Logarithme décimal

En 1614, Neper définit le premier les logarithmes.
Le mot logarithme est construit sur les mots grecs logos dans le sens de rapport et arithmos, nombre.

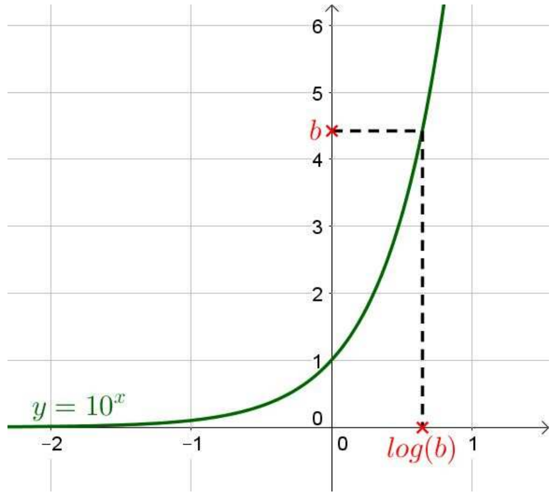
I) Fonction logarithme décimal

A) Définition du logarithme décimal

Définition :

Soit b un nombre réel strictement positif.
L'unique solution de l'équation $10^x = b$, d'inconnue x,
s'appelle le logarithme décimal de b, et se note $log(b)$.

On a alors $x = log(b)$.



Exemples :

a) $10^x = 100$.
La solution de l'équation est
$x = log(100) = log(10^2) = 2$

b) $10^x = 600$.
La solution de l'équation est
$x = log(600) \approx 2.7782$

c) $10^x = 5$.
La solution de l'équation est
$x = log(5) \approx 0.699$

Remarque :

Soit b un réel négatif. L'équation $10^x = b$ n'a pas de solution.

Par exemple, l'équation $10^x = -16$ n'a pas de solution.

Propriétés :
Soit b un réel strictement positif.

(1) $log(10^b) = b$

(2) $10^{log(b)} = b$

Exemples :

a) $log\left(10^9\right) = 9$

b) $log\left(10^{4.5}\right) = 4.5$

c) $10^{log(3)} = 3$

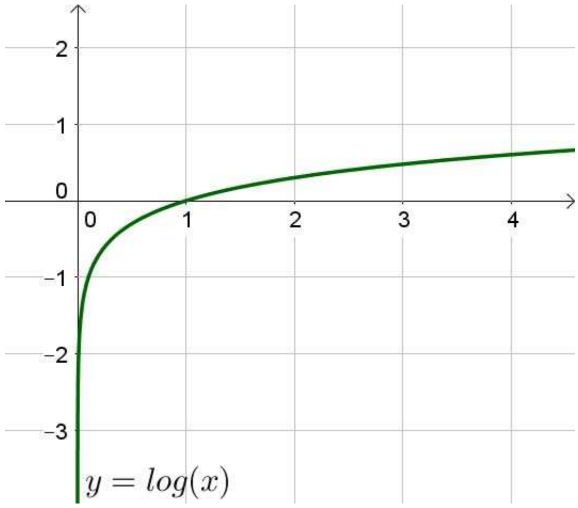
d) $10^{log(0.7)} = 0.7$

Définition :
La fonction logarithme décimal notée log est la fonction qui , à tout réel $x > 0$ associe $log(x)$.
Écrit autrement, on a :

$$\begin{array}{lcccc} log & : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & log(x) \end{array}$$

B) Sens de variation et signe

Propriété admise :
La fonction logarithme décimal $x \mapsto log(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty]$



Exemples : Comparaison de nombres

a) Comparer $log(4)$ et $log(5)$.

On sait que $4 < 5$ donc $log(4) < log(5)$ puisque la fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) Comparer $log\left(\sqrt{14}\right)$ et $log\left(\sqrt{3}\right)$.

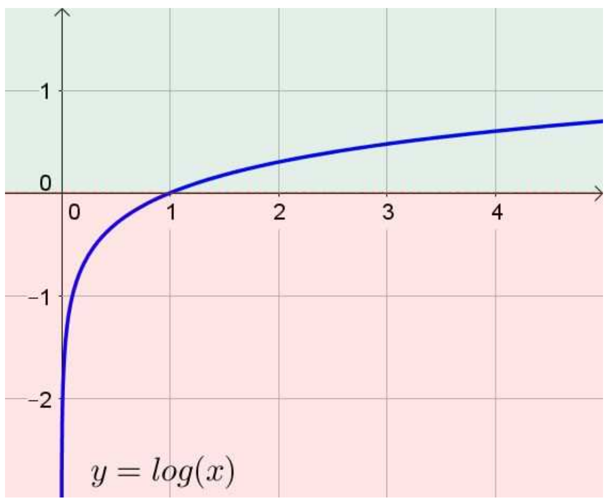
On sait que $\sqrt{3} < \sqrt{14}$ donc $log\left(\sqrt{3}\right) < log\left(\sqrt{14}\right)$ puisque la fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Propriété admise :

Si $x \in]0;1[$ alors $log(x) < 0$.
Si $x \in [1;+\infty[$ alors $log(x) \geqslant 0$.

Tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
signe de $log(x)$	‖	$-$	0	$+$	



Exemples :

a) $log(0.5) \approx -0.301 < 0$ car $0.5 \in]0;1[$

b) $log(1.5) \approx 0.1761 > 0$ car $1.5 \in]1;+\infty[$

II) Propriétés algébriques du logarithme décimal

Propriété admise :
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b,

$$log(a \times b) = log(a) + log(b)$$

Exemples :

a) $log(6) = log(3 \times 2) = log(3) + log(2)$

b) $log\left(\sqrt{11} - 3\right) + log\left(\sqrt{11} + 3\right)$
$= log\left(\left(\sqrt{11} - 3\right) \times \left(\sqrt{11} + 3\right)\right)$
$= log\left(\sqrt{11}^2 - 3^2\right)$
$= log(11 - 9)$
$= log(2)$

Propriétés :
a et b sont deux réels strictement positifs et n est un entier relatif.

$$log(a^n) = nlog(a) \qquad log\left(\frac{1}{a}\right) = -log(a) \qquad log\left(\frac{a}{b}\right) = log(a) - log(b)$$

Exemples :

a) $log\left(2^6\right) = 6log(2)$

b) $log\left(\frac{1}{5}\right) = -log(5)$

c) $log\left(\frac{3}{7}\right) = log(3) - log(7)$

Exemples : Simplifier les expressions suivantes :

d) $log\left(2^3 \times 10^4\right)$
$= log\left(2^3\right) + log\left(10^4\right)$
$= 3log(2) + log\left(10^4\right)$
$= 3log(2) + 4$

e) $log(12) - log(4) + 7log(3)$
$= log\left(\frac{12}{4}\right) + 7log(3)$
$= log(3) + 7log(3)$
$= 8log(3)$

f) Soit x strictement positif.
$log(11x) + log\left(\frac{1}{x}\right) + log\left(3x^{12}\right) - log(3)$
$= log(11) + log(x) + log\left(\frac{1}{x}\right) + log\left(3x^{12}\right) - log(3)$
$= log(11) + log(x) - log(x) + log\left(3x^{12}\right) - log(3)$
$= log(11) + log\left(3x^{12}\right) - log(3)$
$= log(11) + log\left(\frac{3x^{12}}{3}\right)$
$= log(11) + log\left(x^{12}\right)$
$= log(11) + 12log(x)$

Propriété admise :
Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x :

$$log(a^x) = xlog(a)$$

Exemples :

a) $log\left(17^{1.5}\right) = 1.5log(17)$

b)Exprimer l'expression suivante en fonction de $log(7)$ et $log(2)$

$log\left(7^{8.8}\right) + log(14)$

$= 8.8log(7) + log(14)$

$= 8.8log(7) + log(7\times 2)$

$= 8.8log(7) + log(7) + log(2)$

$= 9.8log(7) + log(2)$

III) Résolutions d'équations et d'inéquations

Propriétés admises :
1) Pour tout réel b strictement positif et tout réel a,

$$log(b) = a \Leftrightarrow b = 10^a \qquad\qquad log(b) < a \Leftrightarrow b < 10^a$$

2) Pour tous réels a et b strictement positifs.

$$log(a) = log(b) \Leftrightarrow a = b \qquad\qquad log(a) < log(b) \Leftrightarrow a < b$$

Exemples : Résoudre des équations de la forme $a^x = b$ et $x^a = b$:

$8^x = 24$

$\Leftrightarrow log(8^x) = log(24)$

$\Leftrightarrow xlog(8) = log(24)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{log(24)}{log(8)}$

$2\times 3^x = 34$

$\Leftrightarrow 3^x = \dfrac{34}{2}$

$\Leftrightarrow 3^x = 17$

$\Leftrightarrow log(3^x) = log(17)$

$\Leftrightarrow xlog(3) = log(17)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{log(17)}{log(3)}$

$x^4 = 18$

$\Leftrightarrow log\left(x^4\right) = log(18)$

$\Leftrightarrow 4log(x) = log(18)$

$\Leftrightarrow log(x) = \dfrac{log(18)}{4}$

$\Leftrightarrow 10^{log(x)} = 10^{\frac{log(18)}{4}}$

$\Leftrightarrow x = 10^{\frac{log(18)}{4}}$

Exemples : Résoudre des équations de la forme $a^x < b$ et $x^a < b$:

$15^x < 30$

$\Leftrightarrow log(15^x) < log(30)$

$\Leftrightarrow xlog(15) < log(30)$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{log(30)}{log(15)}$

$\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,\dfrac{log(30)}{log(15)}\right[$

$0.65^x \leqslant 7860$

$\Leftrightarrow log(0.65^x) \leqslant log(7860)$

$\Leftrightarrow xlog(0.65) \leqslant log(7860)$

Attention : $log(0.65) < 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{log(7860)}{log(0.65)}$

$\mathscr{S} = \left[\dfrac{log(7860)}{log(0.65)}\,;\,+\infty\right[$

$x^{5.7} \leqslant 456$

$\Leftrightarrow log\left(x^{5.7}\right) \leqslant log(456)$

$\Leftrightarrow 5.7log(x) \leqslant log(456)$

$\Leftrightarrow log(x) \leqslant \dfrac{log(456)}{5.7}$

$\Leftrightarrow 10^{log(x)} \leqslant 10^{\frac{log(456)}{5.7}}$

$\Leftrightarrow x \leqslant 10^{\frac{log(456)}{5.7}}$

$\mathscr{S} = \left]0\,;\,10^{\frac{log(456)}{5.7}}\right[$