Séquence 5 : Fonction exponentielle de base e

I) Définition

Définition :
Soit a un réel strictement positif.
Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point $(0; 1)$ a pour coefficient directeur 1.
Cette fonction, notée exp, s'appelle la fonction exponentielle de base e. Pour tout x on a : $exp : x \mapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à 2.718 à 10^{-3} près, c'est le nombre d'Euler.

Remarques :

- La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout réel x, $e^x > 0$.
- La fonction exponentielle est dérivable en 0 et le nombre dérivé en 0 est égal à 1.
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

II) Propriétés algébriques

Propriétés (admises) :
Soit e un réel strictement positif, pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\qquad$ $e^{x+y} = e^x \times e^y$ $\qquad$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\qquad$ $e^{nx} = (e^x)^n$

Exemples :

$e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$ $\qquad$ $e^3 \times e^{4.2} = e^{3+4.2} = e^{7.2}$ $\qquad$ $\dfrac{e^{8.6}}{e^{5.1}} = e^{8.6-5.1} = e^{3.5}$ $\qquad$ $(e^4)^{-1.1} = e^{4\times(-1.1)} = e^{-4.4}$

III) Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété (admise) :
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$.

Exemples :

Soient f, g et h des fonctions définies par :

$f(x) = e^x + 3x + 1$ $\qquad$ $g(x) = e^x(3x^2 + 2x + 1)$ $\qquad$ $h(x) = \dfrac{e^x}{3x+2}$

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions.

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x on a : $f'(x) = e^x + 3$.

g est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x on a :

$u(x) = e^x$ $\qquad$ $v(x) = 3x^2 + 2x + 1$
$u'(x) = e^x$ $\qquad$ $v'(x) = 6x + 2$

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$g'(x) = e^x(3x^2 + 2x + 1) + e^x(6x + 2)$
$g'(x) = e^x(3x^2 + 2x + 1 + 6x + 2)$
$g'(x) = e^x(3x^2 + 8x + 3)$

h est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{-2}{3}\}$ et pour tout $x \neq \frac{-2}{3}$ on a :

$u(x) = e^x$ $\qquad$ $v(x) = 3x + 2$

$u'(x) = e^x$ $\qquad$ $v'(x) = 3$

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(3x+2) - e^x \times 3}{(3x+2)^2}$$

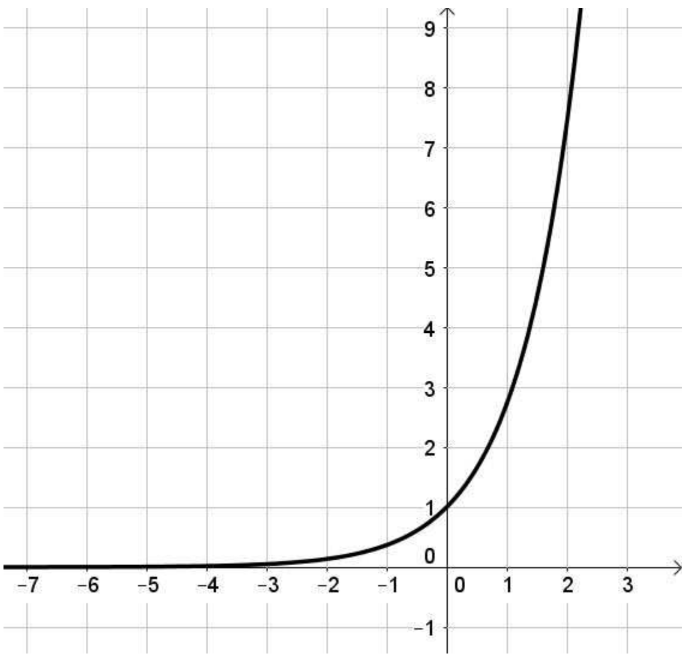
$$h'(x) = \frac{e^x(3x+2) - 3e^x}{(3x+2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(3x+2-3)}{(3x+2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(3x-1)}{(3x+2)^2}$$

2) Sens de variation et courbe représentative

Propriété :
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



Propriétés (admises) :
Pour tous réels x et y :

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $\qquad$ $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

Exemple 1 : Comparer des nombres :

Comparer $e^{1.5}$ et $e^{2.5}$

La fonction exponentielle est strictement croissante donc les images sont rangées dans le même ordre ainsi :
$1.5 < 2.5 \Rightarrow e^{1.5} < e^{2.5}$.

Exemple 2 : Résolutions d'équations et d'inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $e^{3x+8} = e^{-7x+11}$

2) $e^{-9x-4} \leqslant e^{-3x+14}$

Résolution :

1) $e^{3x+8} = e^{-7x+11} \Leftrightarrow 3x+8 = -7x+11$

$$\begin{aligned} & 3x+8 = -7x+11 \\ \Leftrightarrow\ & 3x+8+7x = 11 \\ \Leftrightarrow\ & 10x+8 = 11 \\ \Leftrightarrow\ & 10x = 11-8 \\ \Leftrightarrow\ & 10x = 3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{10x}{10} = \frac{3}{10} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{3}{10} = 0.3 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est 0.3 autrement dit
$\mathscr{S} = \{0.3\}$

2) $e^{-9x-4} \leqslant e^{-3x+14} \Leftrightarrow -9x-4 \leqslant -3x+14$
La fonction exponentielle est strictement croissante, on conserve donc le sens de l'inégalité.

$$\begin{aligned} & -9x-4 \leqslant -3x+14 \\ \Leftrightarrow\ & -9x-4+3x \leqslant 14 \\ \Leftrightarrow\ & -9x+3x \leqslant 14+4 \\ \Leftrightarrow\ & -6x \leqslant 18 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-6x}{-6} \geqslant \frac{18}{-6} \\ \Leftrightarrow\ & x \geqslant \frac{18}{-6} \\ \Leftrightarrow\ & x \geqslant -3 \end{aligned}$$

$\mathscr{S} = [-3;+\infty[$

3) Limites

Propriété (admise) :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Remarques :
1) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ signifie que lorsque x tend vers $-\infty$ c'est à dire lorsque x prend des valeurs de plus en plus petites (grandes en valeur absolue et négatives), e^x prend des valeurs qui se rapprochent de plus en plus de 0.

2) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ signifie que lorsque x tend vers ∞ c'est à dire lorsque x devient "très grand", e^x devient "très grand".

IV) Fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}$

1) Dérivabilité

Propriété (admise) :
Soit k un nombre réel.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = ke^{kx}$.

Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle sur I.
La fonction définie sur I par $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable et pour tout réel $x \in I$ on a : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Exemples :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x}$. Déterminer la dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x on a : $f'(x) = 4e^{4x}$.

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2-3x+7}$. Déterminer la dérivée de g.

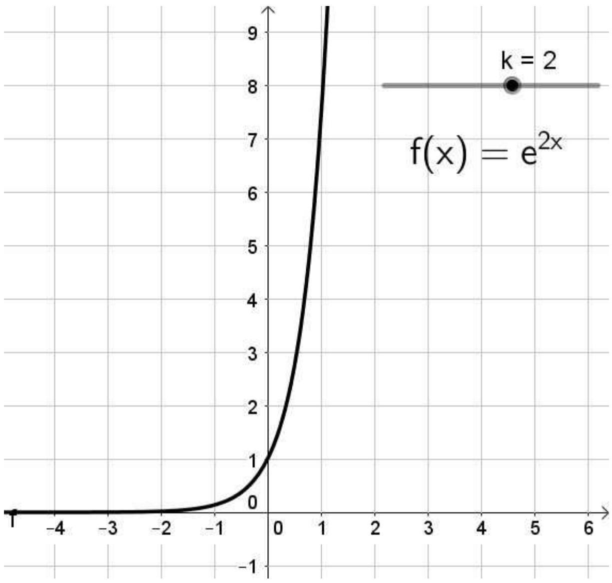
g est de la forme e^u où u est la fonction définie par : $u(x) = x^2 - 3x + 7$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x - 3$.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x on a :
$g'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x-3)e^{x^2-3x+7}$.

2) Sens de variation

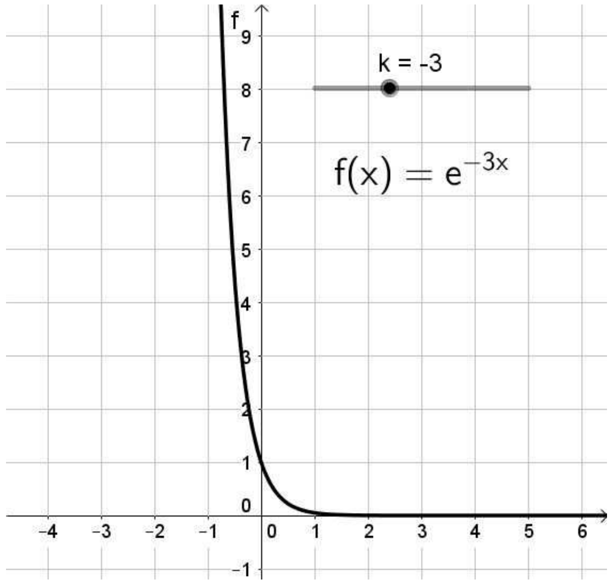
Propriété (admise) :
Soit k un nombre réel.
Si $k > 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{kx}$ est croissante.
Si $k < 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^{kx}$ est décroissante.

Exemples :

$2 > 0$ donc la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est une fonction croissante.



$-3 < 0$ donc la fonction $x \mapsto e^{-3x}$ est une fonction décroissante.



3) Limites

Propriété (admise) :
Soit k un nombre réel.

Si $k > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty$

Si $k < 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = 0$

Exemples :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{6.5x} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-4x} = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-8.5x} = 0$

V) Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Propriété (admise) :

Pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$

Exemples :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 e^{-x} = 0$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^6}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^6 e^{-x} = 0$