Séquence 5 : Logarithme népérien

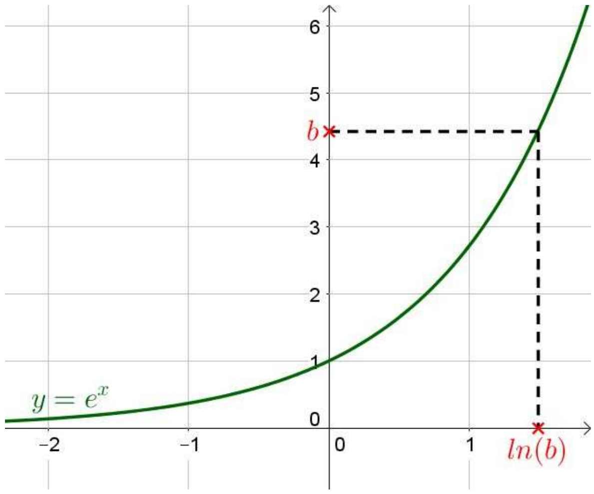
En 1614, Neper définit le premier les logarithmes.
Le mot logarithme est construit sur les mots grecs logos dans le sens de rapport et arithmos, nombre.

I) Définition du logarithme népérien

Définition :

Soit b un nombre réel strictement positif.
L'unique solution de l'équation $e^x = b$, d'inconnue x, s'appelle le logarithme népérien de b, et se note $\ln(b)$.

On a alors $x = \ln(b)$.



Remarque :
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$

Exemples :

a) $e^x = 100$.
La solution de l'équation est
$x = \ln(100) \approx 4.6052$

b) $e^x = 600$.
La solution de l'équation est
$x = \ln(600) \approx 6.3969$

c) $e^x = 5$.
La solution de l'équation est
$x = \ln(5) \approx 1.6094$

Remarque :

Soit b un réel négatif. L'équation $e^x = b$ n'a pas de solution.

Par exemple, l'équation $e^x = -16$ n'a pas de solution.

Propriétés :
Soit b un réel strictement positif.

(1) $\ln(e^b) = b$

(2) $e^{\ln(b)} = b$

Remarques :

$\ln(e^0) = \ln(1) = 0$

$\ln(e^1) = \ln(e) = 1$

Exemples :

a) $\ln\left(e^9\right) = 9$

b) $\ln\left(e^{4.5}\right) = 4.5$

c) $e^{\ln(3)} = 3$

d) $e^{\ln(0.7)} = 0.7$

II) Étude de la fonction logarithme népérien

1) Définition de la fonction logarithme népérien

Définition :
La fonction logarithme népérien notée ln est la fonction qui , à tout réel $x > 0$ associe $\ln(x)$.
Écrit autrement, on a :

$$\begin{array}{rcccl} \ln & : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

2) Dérivabilité

Propriété (admise) :
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 6x - \ln(x) + 4$.
Donner la dérivée de f puis donner son tableau de variation.

Résolution :
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout x de $]0;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = 6 - \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{6x}{x} - \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{6x-1}{x}$$

Déterminons le tableau de variation de la fonction f.

0 est la valeur interdite

$6x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 6x = 1$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $6x-1$	
Signe de x	
Signe de $f'(x)$	
Variation de f	

Propriété (admise) :
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ pour tout réel x de I.
La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple :

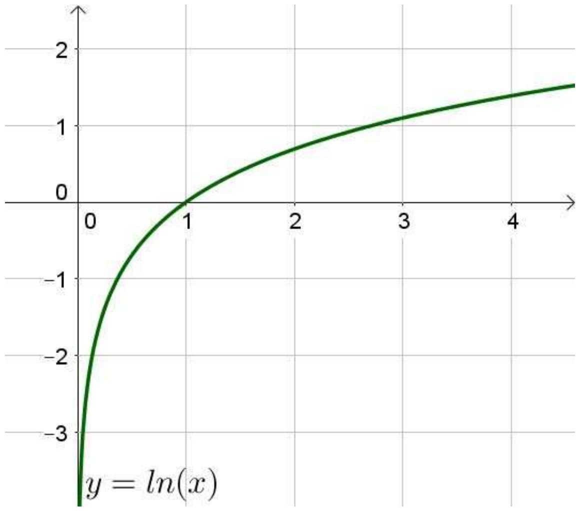
Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$. Donner la dérivée de f.

Résolution :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction dérivable. Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

3) Sens de variation et signe

Propriété admise :

La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$



Exemples : Comparaison de nombres

a) Comparer $\ln(4)$ et $\ln(5)$.

On sait que $4 < 5$ donc $\ln(4) < \ln(5)$ puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) Comparer $ln\left(\sqrt{14}\right)$ et $\ln\left(\sqrt{3}\right)$.

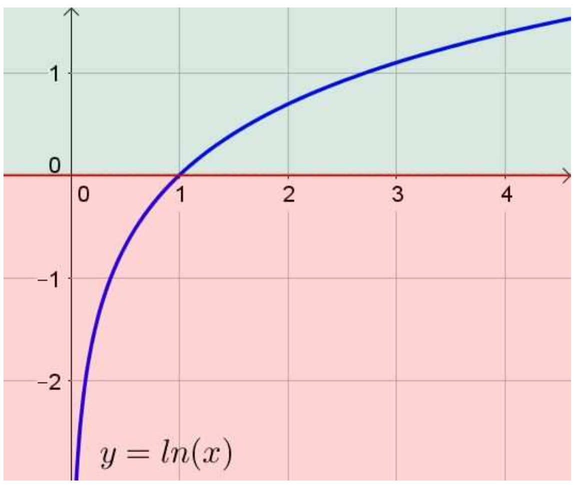
On sait que $\sqrt{3} < \sqrt{14}$ donc $\ln\left(\sqrt{3}\right) < \ln\left(\sqrt{14}\right)$ puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Propriété admise :

Si $x \in]0;1[$ alors $ln(x) < 0$.
Si $x \in [1;+\infty[$ alors $\ln(x) \geqslant 0$.

Tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
signe de $\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	



Exemples :

a) $\ln(0.5) \approx -0.6931 < 0$ car $0.5 \in]0;1[$

b) $\ln(1.5) \approx 0.4055 > 0$ car $1.5 \in]1;+\infty[$

4) Limites

Propriété (admise) :

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

III) Propriétés algébriques du logarithme népérien

Propriété admise :
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exemples :

a) $\ln(6) = \ln(3 \times 2) = \ln(3) + \ln(2)$

b) $\ln(5) + \ln(2) = \ln(5 \times 2) = \ln(10)$

Propriétés :
a et b sont deux réels strictement positifs et n est un entier relatif.

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Exemples :

a) $\ln\left(2^6\right) = 6\ln(2)$

b) $\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5)$

c) $\ln\left(\frac{3}{7}\right) = \ln(3) - \ln(7)$

Exemples : Simplifier les expressions suivantes :

d) $\ln\left(2^3 \times 10^4\right)$

$= \ln\left(2^3\right) + \ln\left(10^4\right)$

$= 3\ln(2) + \ln\left(10^4\right)$

$= 3\ln(2) + 4\ln(10)$

e) $\ln(12) - \ln(4) + 7\ln(3)$

$= \ln\left(\frac{12}{4}\right) + 7\ln(3)$

$= \ln(3) + 7\ln(3)$

$= 8\ln(3)$

f) Soit x strictement positif.

$\ln(11x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(3x^{12}\right) - \ln(3)$

$= \ln(11) + \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(3x^{12}\right) - \ln(3)$

$= \ln(11) + \ln(x) - \ln(x) + \ln\left(3x^{12}\right) - \ln(3)$

$= \ln(11) + \ln\left(3x^{12}\right) - \ln(3)$

$= \ln(11) + \ln\left(\frac{3x^{12}}{3}\right)$

$= \ln(11) + \ln\left(x^{12}\right)$

$= \ln(11) + 12\ln(x)$

Propriété admise :
Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x :

$$\ln(a^x) = x\ln(a)$$

Exemples :

a) $\ln\left(17^{1.5}\right) = 1.5\ln(17)$

b)Exprimer l'expression suivante en fonction de $\ln(7)$ et $\ln(2)$

$\ln\left(7^{8.8}\right) + \ln(14)$

$= 8.8\ln(7) + \ln(14)$

$= 8.8\ln(7) + \ln(7 \times 2)$

$= 8.8\ln(7) + \ln(7) + \ln(2)$

$= 9.8\ln(7) + \ln(2)$

IV) Résolutions d'équations et d'inéquations

Propriétés admises :
1) Pour tout réel b strictement positif et tout réel a,

$$\ln(b) = a \Leftrightarrow b = e^a \qquad \ln(b) < a \Leftrightarrow b < e^a$$

2) Pour tous réels a et b strictement positifs.

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b \qquad \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$$

Exemples d'équations

Exemple 1 : Résoudre des équations de la forme $a^x = b$:

$8^x = 24$

$\Leftrightarrow \ln(8^x) = \ln(24)$

$\Leftrightarrow x\ln(8) = \ln(24)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(24)}{\ln(8)}$

$2 \times 3^x = 34$

$\Leftrightarrow 3^x = \dfrac{34}{2}$

$\Leftrightarrow 3^x = 17$

$\Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln(17)$

$\Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(17)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(17)}{\ln(3)}$

Exemple 2 : Résoudre des équations de la forme $x^a = b$:

$x^4 = 18$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^4\right) = \ln(18)$

$\Leftrightarrow 4\ln(x) = \ln(18)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \dfrac{\ln(18)}{4}$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{\frac{\ln(18)}{4}}$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(18)}{4}}$

$7x^6 + 1 = 22$

$7x^6 = 22 - 1$

$x^6 = \dfrac{21}{7} = 3$

$\Leftrightarrow \ln\left(x^6\right) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow 6\ln(x) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \dfrac{\ln(3)}{6}$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{\frac{\ln(3)}{6}}$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(3)}{6}}$

Exemple 3 : Résoudre des équations de la forme $e^x = b$:

$$e^x = 3$$
$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(3)$$
$$\mathscr{S} = \{\ln(3)\}$$

$$e^{2x+8} = 8$$
$$\Leftrightarrow \ln(e^{2x+8}) = \ln(8)$$
$$\Leftrightarrow 2x + 8 = \ln(8)$$
$$\Leftrightarrow 2x = \ln(8) - 8$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(8) - 8}{2}$$
$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\ln(8) - 8}{2}\right\}$$

Exemple 4 : Résoudre des équations de la forme $\ln(x) = b$:

$$\ln(x) = 7$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^7$$
$$\Leftrightarrow x = e^7$$
$$\mathscr{S} = \{e^7\}$$

$$2\ln(x) = 98$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{98}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = 49$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{49}$$
$$\Leftrightarrow x = e^{49}$$
$$\mathscr{S} = \{e^{49}\}$$

Exemples d'inéquations

Exemple 1 : Résoudre des équations de la forme $a^x < b$:

$$15^x < 30$$
$$\Leftrightarrow \ln(15^x) < \ln(30)$$
$$\Leftrightarrow x\ln(15) < \ln(30)$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{\ln(30)}{\ln(15)}$$
$$\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,\frac{\ln(30)}{\ln(15)}\right[$$

$$0.65^x \leqslant 7860$$
$$\Leftrightarrow \ln(0.65^x) \leqslant \ln(7860)$$
$$\Leftrightarrow x\ln(0.65) \leqslant \ln(7860)$$

Attention : $\ln(0.65) < 0$

$$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{\ln(7860)}{\ln(0.65)}$$
$$\mathscr{S} = \left[\frac{\ln(7860)}{\ln(0.65)}\,;\,+\infty\right[$$

Exemple 2 : Résoudre des équations de la forme $x^a < b$:

$$x^{5.7} \leqslant 456$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(x^{5.7}\right) \leqslant \ln(456)$$
$$\Leftrightarrow 5.7\ln(x) \leqslant \ln(456)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) \leqslant \frac{\ln(456)}{5.7}$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \leqslant e^{\frac{\ln(456)}{5.7}}$$
$$\Leftrightarrow x \leqslant e^{\frac{\ln(456)}{5.7}}$$
$$\mathscr{S} = \left]0\,;\,e^{\frac{\ln(456)}{5.7}}\right]$$

$$2x^3 - 2 \geqslant 358$$
$$2x^3 \geqslant 358 + 2$$
$$x^3 \geqslant \frac{360}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x^3) \geqslant \ln(180)$$
$$\Leftrightarrow 3\ln(x) \geqslant \ln(180)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \frac{\ln(180)}{3}$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geqslant e^{\frac{\ln(180)}{3}}$$
$$\Leftrightarrow x \geqslant e^{\frac{\ln(180)}{3}}$$
$$\mathscr{S} = \left]\frac{\ln(180)}{3}\,;\,+\infty\right[$$

Exemple 3 : Résoudre des inéquations de la forme $e^x < b$:

$e^{-6x+4} < 14$

$\Leftrightarrow \ln(e^{-6x+4}) < \ln(14)$

$\Leftrightarrow -6x+4 < \ln(14)$

$\Leftrightarrow -6x < \ln(14)-4$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln(14)-4}{-6}$

$\mathscr{S} = \left]\dfrac{\ln(14)-4}{-6}\,;\,+\infty\right[$

$e^{3x+1} \leqslant 163$

$\Leftrightarrow \ln(e^{3x+1}) \leqslant \ln(163)$

$\Leftrightarrow 3x+1 \leqslant \ln(163)$

$\Leftrightarrow 3x \leqslant \ln(163)-1$

$\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\ln(163)-1}{3}$

$\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,\dfrac{\ln(163)-1}{3}\right[$

Exemple 4 : Résoudre des équations de la forme $\ln(x) < b$:

Résolvons l'inéquation $\ln(x)-1 < 24$ sur $]0;+\infty[$

$\ln(x)-1 < 24$

$\Leftrightarrow \ln(x) < 24+1$

$\Leftrightarrow \ln(x) < 25$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} < e^{25}$

$\Leftrightarrow x < e^{25}$

$\mathscr{S} = \left]0\,;\,e^{25}\right[$

Résolvons l'inéquation $-8\ln(x)+5 \leqslant 253$ sur $]0;+\infty[$

$-8\ln(x)+5 \leqslant 253$

$\Leftrightarrow -8\ln(x) \leqslant 253-5$

$\Leftrightarrow -8\ln(x) \leqslant 248$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leqslant \dfrac{248}{-8}$

$\Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -31$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geqslant e^{-31}$

$\Leftrightarrow x \geqslant e^{-31}$

$\mathscr{S} = \left[e^{-31}\,;\,+\infty\right[$