Séquence 7 : Équations différentielles linéaires du premier ordre

I) Définition

Définition :
Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction notée généralement y et dans laquelle apparait une relation entre une ou plusieurs dérivées successives de y.

Une fonction qui vérifie une équation différentielle est une solution de cette équation.

Résoudre une équation différentielle c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation différentielle.

Notations : Une même équation différentielle peut s'écrire de plusieurs façons.
L'équation différentielle $y' + 8y = 7$ s'écrit aussi :

- $y'(t) + 8y(t) = 7$
- $y'(x) + 8y(x) = 7$
- $\dfrac{dy}{dt}(t) + 8y(t) = 7$
- $\dfrac{dy}{dt} + 8y = 7$

Exemples :

$y' = 2y$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

$3xy' - 2y = 0$ est une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants.

$\dfrac{dy}{dx} + 3y^2 = 0$ est une équation différentielle non linéaire du premier ordre à coefficients constants.

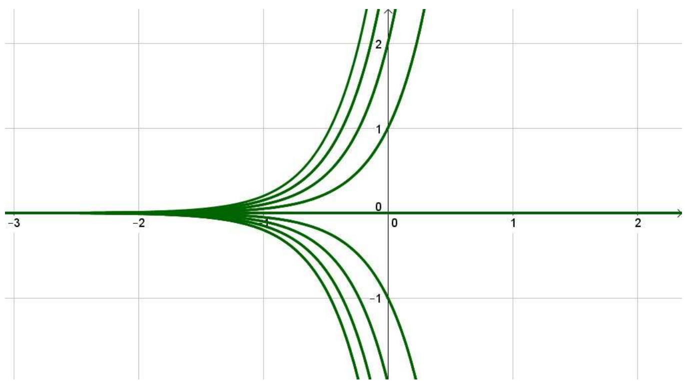
$y'' + 7y' + 4y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

II) Équation différentielle de la forme $y' = ay$

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (où a est une constante réelle), sont les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Exemples :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 3y$.
$y' = 3y$ est une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = 3$.
Les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{3x}$, où C est une constante réelle quelconque.
Autrement dit, les solutions de l'équation sont les fonctions y de la forme $y(x) = Ce^{3x}$, où C est une constante réelle quelconque.



2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$.

$2y' - 5y = 0$
$2y' = 5y$
$y' = \dfrac{5}{2}y$

$y' = \dfrac{5}{2}y$ est une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = \dfrac{5}{2}$.
Les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{\frac{5}{2}x}$, où C est une constante réelle quelconque ou encore les solutions de l'équation sont les fonctions y de la forme $y(x) = Ce^{\frac{5}{2}x}$, où C est une constante réelle quelconque.

III) Équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (où a et b sont des constantes réelles avec a non nulle), sont les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle quelconque.

Remarques :
1) L'équation $y' = ay + b$ (où a et b sont des constantes réelles avec a non nulle) est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
2) La fonction constante $x \mapsto \frac{-b}{a}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Exemples :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 3y + 6$.

$y' = 3y + 6$ est une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = 6$.
Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' = 3y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{3x}$, où C est une constante réelle quelconque ou encore les solutions de l'équation différentielle homogène $y' = 3y$ sont les fonctions y de la forme $y(x) = Ce^{3x}$, où C est une constante réelle quelconque.

Ici, $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{3} = -2$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{3x} - 2$, où C est une constante réelle quelconque ou encore les solutions de l'équation sont les fonctions y de la forme $y(x) = Ce^{3x} - 2$, où C est une constante réelle quelconque.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' - 10y + 60 = 0$.

$2y' - 10y + 60 = 0$
$2y' = 10y - 60$
$y' = 5y - 30$

$y' = 5y - 30$ est une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 5$ et $b = -30$.

Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' = 5y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{5x}$, où C est une constante réelle quelconque ou encore les solutions de l'équation différentielle homogène $y' = 5y$ sont les fonctions y de la forme $y(x) = Ce^{5x}$, où C est une constante réelle quelconque.

Ici, $-\frac{b}{a} = -\frac{-30}{5} = 6$

Les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{5x} + 6$, où C est une constante réelle quelconque ou encore les solutions de l'équation sont les fonctions y de la forme $y(x) = Ce^{5x} + 6$, où C est une constante réelle quelconque.

Théorème :
Soient x_0, y_0 , a et b des réels donnés ($a \neq 0$). L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Exemples :

1) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' = 0.5y + 7$ vérifiant $f(0) = 1$.

Étape 1 : Résolution de $y' = 0.5y + 7$

$y' = 0.5y + 7$ est une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 0.5$ et $b = 7$.

Ici, $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{7}{0.5} = -14$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{0.5x} - 14$, où C est une constante réelle quelconque.

Étape 2 : Détermination de l'unique fonction f solution de l'équation différentielle et vérifiant $f(0) = 1$

On sait que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x) = Ce^{0.5x} - 14$. Déterminons l'unique solution vérifiant $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
Ce^{0.5\times 0} - 14 &= 1 \\
Ce^{0} - 14 &= 1 \\
C - 14 &= 1 \\
C &= 1 + 14 \\
C &= 15
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 15e^{0.5x} - 14$.

2) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' + 2y - 3 = 0$ vérifiant $f(1) = 10$.

Étape 1 : Résolution de $y' + 2y - 3 = 0$

$y' + 2y - 3 = 0$
$y' = -2y + 3$

$y' = -2y + 3$ est une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 3$.

Ici, $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{-2} = 1.5$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto Ce^{-2x} + 1.5$, où C est une constante réelle quelconque.

Étape 2 : Détermination de l'unique fonction f solution de l'équation différentielle et vérifiant $f(1) = 10$

On sait que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x) = Ce^{-2x} + 1.5$. Déterminons l'unique solution vérifiant $f(1) = 10$.

$$\begin{aligned}
f(1) &= 10 \\
Ce^{-2\times 1} + 1.5 &= 10 \\
Ce^{-2} + 1.5 &= 10 \\
Ce^{-2} &= 10 - 1.5 \\
Ce^{-2} &= 8.5 \\
C &= \frac{8.5}{e^{-2}}
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $f(1) = 10$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \dfrac{8.5}{e^{-2}}e^{-2x} + 1.5$.

Pour aller plus loin (non exigible) : Généralisation - Équation différentielle de la forme y' = ay + f

> Théorème :
> L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} + g(x)$ où C est une constante réelle quelconque et où g est une solution particulière.

Cas où $f(x)$ est une constante

Ce cas a été traité dans la partie III)

Cas où $f(x)$ est un polynôme

Méthode : Chercher $g(x)$ sous la forme d'un polynôme de même degré que $f(x)$.

Cas où $f(x) = A\cos(\omega x + \phi) + B\sin(\omega x + \phi)$

Méthode : Chercher sous la forme $g(x) = A'\cos(\omega x + \phi) + B'\sin(\omega x + \phi)$

Cas où $f(x) = ke^{\lambda x}$

Méthode : Chercher $g(x)$ sous la forme $g(x) = Ae^{\lambda x}$ où A est une constante à déterminer.

Remarque : Dans tous les autres cas, un logiciel de calcul formel permet de résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exemple :
1) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 1.5$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = -2y + 4x - 1$.

2) En déduire la solution générale de l'équation différentielle $y' = -2y + 4x - 1$.

1) D'une part, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $g'(x) = 2$.
D'autre part , $-2g(x) + 4x - 1 = -2(2x - 1.5) + 4x - 1 = -4x + 3 - 1 = 2$
Ainsi on a $g' = -2g + 4x - 1$.
On en déduit que g est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = -2 + 4x - 1$.

2) La solution générale de l'équation différentielle $y' = -2y + 4x - 1$ est $x \longmapsto Ce^{-2x} + 2x + 1.5$ où C est une constante quelconque.