Séquence 7 : Fiche d'exercices

Exercice 1

1. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2$ est une solution de l'équation différentielle $3y' - 2y + 4 = 0$.
2. Montrez que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas une solution de l'équation différentielle $xy' = 1$.
3. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -1.5 + e^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 3$.
4. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-x} + 1$ est une solution de l'équation différentielle $y" + y' = 0$.
5. Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + e^{-5x}$ est une solution de l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 10$.
6. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ est une solution de l'équation différentielle $x^2y' - y = 2x^3 - x$, avec x réel.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles proposées.

a. $y' = 10y$	b. $y' = -3y$	c. $y' + 4y = 0$	d. $y' + 7y = 0$
e. $6y' - 12y = 0$	f. $4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$	g. $y' - 0.2y = 0$	h. $7\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$

Bonus : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes : $\sqrt{8}y = \sqrt{2}y'$ et $y = 4y'$

Exercice 3

On étudie une culture de microbes, et on s'intéresse à leur vitesse de prolifération.
Le nombre de microbes $N(t)$ est exprimé en fonction du temps t (en heures).
La vitesse de prolifération est la dérivée N'. On suppose que la fonction N est une solution de l'équation différentielle $y' = 0.3y$.

1. Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.
2. On suppose que $N(0) = 10000$. En déduire la fonction N vérifiant cette condition.

Exercice 4

Au début de la croissance de certaines espèces végétales telle que le maïs, le coton ou le soja, la vitesse de croissance (en $g/jour$) est proportionnelle à la masse M(en g). Pour certaines espèces de coton, M varie en fonction de t (en jours) selon l'équation différentielle $M'(t) = 0.19M(t)$.

Niveau 1 :

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. La plante pesait $0.09g$ au début du mois, déterminer la fonction M vérifiant cette condition.
3. En déduire, la masse d'une plante à la fin d'un mois ($t = 30$).

Niveau 2 :

1. Évaluer la masse d'une plante à la fin d'un mois ($t = 30$ jours) si la plante pesait 90 mg au début de ce mois.

Exercice 5

Une catastrophe a rendu impropre à la consommation l'eau potable d'une commune. L'eau du réseau contient une substance chimique dont l'évolution de la concentration (en $mg.L^{-1}$ en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis le début de la pollution est modélisée par une fonction f solution de l'équation différentielle $y' + 0.06y = 0$. Cette concentration est actuellement de 30 $mg.L^{-1}$.

1. Déterminer l'expression de f
2. Quelle est la concentration, à 10^{-2}, de la substance chimique dans l'eau au bout d'une journée ?
3. L'eau sera de nouveau consommable si la concentration de la substance chimique dans l'eau est inférieure à 0.05 $mg.L^{-1}$. Au bout de combien de temps pourra t-on de nouveau consommer l'eau du robinet ?

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles proposées.

a. $y' = 3y + 7$ b. $y' = -8y + 1$ c. $2y' = 9y + 2$ d. $3y' + 12y - 24 = 0$

e. $10y' + y = 30$ f. $\dfrac{dy}{dx} + 0.15y = 4.5$ g. $\dfrac{1}{200}y' + y = 146$ h. $7\dfrac{dy}{dx} - 0.4y = 28$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles proposées et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a. $y' = -8y + 3$; $y(0) = 3$

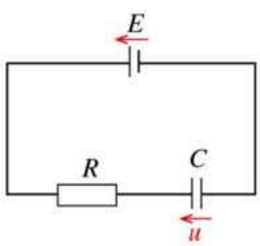
b. $y' = -10y + 100$; $y(100) = 1$

c. $y' + 0.05y = 2$; $y(0) = 25$

d. $2y' - 3y = 6$; $y(2) = e$

Exercice 8

On étudie la charge d'un condensateur. Le circuit électrique ci-dessous est composé d'une source de tension continue E de $10V$, d'une résistance R de $10^5\,\Omega$ et d'un condensateur de capacité C de 10^{-6} farads (F).
On note u la tension exprimée en volts aux bornes du condensateur. Cette tension u est une fonction du temps t ($t \geqslant 0$) exprimé en secondes. Elle vérifie l'équation différentielle : $RC\dfrac{du}{dt} + u = E$.



1. Déterminer la forme générale $u(t)$ des solutions de cette équation différentielle.
2. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction u telle que $u(0) = 0$.
3. Dans cette question, on considère que $u(t) = -10e^{-10t} + 10$.
   Étudier le sens de variation de la fonction u sur $[0; +\infty[$.
4. Déterminer, en justifiant la réponse, la limite en $+\infty$ de la fonction u obtenue. Interpréter ce résultat.
5. On souhaite déterminer le temps de charge t (en secondes) pour que $u(t)$ soit supérieur ou égal à 95 % de E.
6. Compléter le programme Python ci-contre afin que l'appel $temps(9.5)$ retourne la plus petite valeur de t telle que $u(t)$ soit supérieur ou égal à 9.5.
7. Déterminer cette valeur par un calcul et en donner un arrondi au dix-millième.

```python
from math import *

def temps(seuil) :
    t = 0
    while ..................... < seuil :
        t = t + 0.1
    return t
```

Pour aller plus loin

Exercice 14

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - y = x^2 - x - 1$ dans laquelle y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 - x$ est une solution de l'équation différentielle.
3. En déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$

Exercice 15

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 6e^{-x}$, où y désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $y' + 3y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^{-x}$
3. Déterminer la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$

Exercice 16

Soit (E) l'équation différentielle $3y' - 2y = -20\cos(2t)$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle $3y' - 2y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 10\cos(2t) + Ce^{\frac{2}{3}x}$ est une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E)
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exercice 17 : Pour aller plus loin

Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + 3y = 6t^2 - 7t - 7$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène.
2. Déterminer trois constantes a, b et c telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = at^2 + bt + c$ soit solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.
5. Même question pour l'équation différentielle (E_1) : $6y' - 2y = 4x^2 - 5$

Exercice 18 : Pour aller plus loin

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 4y = 2e^{3t}$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène.
2. Déterminer une constante réelle K telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = Ke^{3t}$ soit solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.