Séquence 8 : Nombres complexes (Partie 2)

I) Rappel

Rappel :
Pour tous réels θ et θ'. Pour entier naturel n,

1) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

2) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

3) $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Exemples :

1) $e^{i\frac{\pi}{5}} \times e^{i\frac{3\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{5}}$

2) $\dfrac{e^{i\frac{7\pi}{3}}}{e^{i\frac{5\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{7\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3) $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3 = e^{i\times 3\times\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

II) Formules de trigonométrie

1)Propriétés

Propriétés (Formules d'addition) :

Pour tous réels θ et θ',

$\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')$

$\sin(\theta+\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')$

Démonstration :

Remarques :

$\cos(\theta-\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta')$

$\sin(\theta-\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta')$

Propriétés (Formules de duplication) :

Pour tout réel θ, on a les égalités suivantes :

$\cos(2\theta) = cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

$\cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1$

$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$

$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

Démonstration :

Remarque :
$\cos^2(x) = (\cos(x))^2$ et $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$

Exemple :

Déterminer $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

$$\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Propriétés (Formules de linéarisation) :

Pour tout réel θ, on a les égalités suivantes :

$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$ $\qquad$ $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$

2) Applications

Application 1 : Transformer l'expression $A\cos(\omega t + \phi)$ en $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

On suppose qu'un signal est modélisé par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 8\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.
Pour tout réel t exprimer $f(t)$ sous la forme $a\cos(2t) + b\sin(2t)$ avec a et b à déterminer.

$f(t) = 8\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

$f(t) = 8\left(\cos(2t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$f(t) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)\right)$

$f(t) = 8\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2t) - 8\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)$

$f(t) = 4\sqrt{2}\cos(2t) - 4\sqrt{2}\sin(2t)$ $\qquad$ où $a = 4\sqrt{2}$ et $b = -4\sqrt{2}$

Application 2 : Transformer l'expression $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t+\phi)$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\sqrt{3}\cos(4t)+\sin(4t)$.
Écrire f sous la forme : $f(t)=A\cos(\omega t+\phi)$, avec A , ω, et ϕ à déterminer.

$f(t)=\sqrt{3}\cos(4t)+1\sin(4t)$

1) Détermination de A

$f(t)$ est sous la forme $f(t)=a\cos(4t)+b\sin(4t)$ où $a=\sqrt{3}$ et $b=1$.

$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

2) Écriture de $f(t)$ sous la forme : $f(t)=A\cos(\omega t+\phi)$

a. Factorisation par A l'expression et transformation l'écriture.

$f(t)=\sqrt{3}\cos(4t)+\sin(4t)$

$f(t)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(4t)+\dfrac{1}{2}\sin(4t)\right)$

$f(t)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(4t)-\dfrac{-1}{2}\sin(4t)\right)$

b. Détermination de ϕ

$\begin{cases}\cos(\phi)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2mm] \sin(\phi)=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$ On peut en déduire qu'une valeur de ϕ est $\dfrac{-\pi}{6}$.

c. Mise sous la forme $cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')$

$2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\cos(4t)-\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\sin(4t)\right)$

d. Utilisation de la propriété $cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')=\cos(\theta+\theta')$ pour écrire $f(t)$ sous la forme
$f(t)=A\cos(\omega t+\phi)$

$f(t)=2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\cos(4t)-\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\sin(4t)\right)$

$f(t)=2\cos\left(4t+\dfrac{-\pi}{6}\right)$ où $A=2$, $\omega=4$ et $\phi=\dfrac{-\pi}{6}$