Rappel 2 : Fonctions dérivables sur un intervalle

I) Définition de la dérivée d'une fonction

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I lorsque f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I, noté $f'(x)$.
On appelle fonction dérivée de f sur I, notée f', la fonction définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$

II) Fonction dérivée des fonctions de référence

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Fonction constante : $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$ n entier naturel non nul	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Fonction cosinus : $f(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -sin(x)$
Fonction sinus : $f(x) = sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = cos(x)$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^4$. Donner la dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout x on a :
$f'(x) = 4x^3$.

III) Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opération	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$u+v$	I	I	$u'+v'$
ku avec k réel	I	I	ku'
uv	I	I	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	u ne s'annulant pas sur I	I	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	v ne s'annulant pas sur I	I	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemple 1 :
Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2+3x+1$. Donner la dérivée de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a pour tout x, $f'(x)=2x+3$.

Exemple 2 :
Soit f la fonction définie par $f(x)=(7x^2+8x-1)(9x+1)$. Donner la dérivée de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables et on a :

$u(x)=7x^2+8x-1$
$u'(x)=14x+8$

$v(x)=9x+1$
$v'(x)=9$

On a donc : $f'(x)=(14x+8)(9x+1)+(7x^2+8x-1)\times 9$

On développe et on réduit :

$f'(x)=126x^2+14x+72x+8+63x^2+72x-9$
$f'(x)=189x^2+158x-1$

Théorème :
Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout x réel tel que $mx+p$ appartient à I, la fonction définie par $f(x)=g(mx+p)$ est dérivable et $f'(x)=m\times g'(mx+p)$.

Exemple :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(5x+8)^4$.
$f'(x)=5\times 4(5x+8)^3$.