Troisième entrainement

EXERCICE 1 COMMUN À TOUS LES CANDIDATS 4 points

Loi de refroidissement de Newton
Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter.

Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est correcte.
Pour les quatre questions traitées, indiquer sur la copie l'affirmation choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse correcte rapporte un point.
Une réponse incorrecte, une réponse multiple, une absence de réponse, ne rapportent ni n'enlèvent de point.

La loi de refroidissement de Newton indique que la vitesse de refroidissement d'un matériau est proportionnelle à la différence entre la température θ (en degré Celsius) de ce matériau à l'instant t (en minute) et la température A constante de l'air ambiant.
Cela se traduit par la relation

$$\theta'(t) = \alpha(\theta(t) - A),$$

où θ est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ modélisant la température du matériau en fonction du temps t, en prenant comme origine du temps l'instant où la pièce en acier est mise à refroidir.
La valeur du coefficient α, qui est négatif, dépend du matériau.

Pour l'ensemble des questions suivantes, on admet que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction θ est définie par :

$$\theta(t) = 580\mathrm{e}^{-0,1t} + 20.$$

1. La fonction θ est solution de l'équation :
   a. $y = -0,1y' + 2$ **b.** $y = -0,1y' + 20$
   c. $y' = -0,1y + 2$ **d.** $y' = 0,1y + 20$
2. La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction θ au point d'abscisse 10 vaut :
   a. $-\dfrac{58}{\mathrm{e}}$ **b.** $580\mathrm{e}^{-1} + 20$
   c. $-\dfrac{58}{\mathrm{e}} + 20$ **d.** $\dfrac{580}{\mathrm{e}}$
3. Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction θ est :
   a. croissante **b.** décroissante
   c. croissante puis décroissante **d.** constante
4. La limite en $+\infty$ de $\theta(t)$ est :
   a. 20 **b.** 580
   c. $-\infty$ **d.** $+\infty$

La pièce peut être manipulée lorsque sa température devient inférieure à 40 ° C.

Pour déterminer la durée minimale d'attente (en minutes), à compter de l'instant où elle est mise à refroidir, on veut mettre en place un algorithme de balayage, écrit en langage Python.

```
1  from math import exp
2
3  duree_d_attente ( ) :
4      t = 0
5      Temperature = 600
6      ……..
7          t = t + 1
8          Temperature = 580 * exp(- 0,1*t) + 20
9          return t
```

5. Pour que la valeur renvoyée par la fonction **duree_d_attente** soit la valeur entière minimale de la durée d'attente, la ligne 6 contient :

   a. while $t > 40$:
   b. while Temperature > 40 :
   c. while Temperature < 40 :
   d. for i in range(Temperature) :

6. L'inéquation $\theta(t) < 40$, d'inconnue t, admet comme ensemble solution sur $[0\,;\,+\infty[$:

   a. l'intervalle $\left[0\,;\,10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\right]$
   b. l'intervalle $\left[-10\ln\left(\frac{1}{29}\right)\,;\,+\infty\right[$
   c. l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{10}{29}\right]$
   d. l'ensemble vide (pas de solution)

EXERCICE 2 2 points

Dans la suite de l'exercice, on modélise la vitesse du parachutiste $\left(\text{en m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$, en fonction du temps t écoulé (en seconde) depuis le largage, par la fonction v, solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -0,16v(t) + 9,81.$$

On suppose que $v(0) = 0$.

(a) Démontrer que $v(t) = \dfrac{981}{16}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,16t}\right)$, pour t réel positif.
La brochure commerciale présentant le saut en parachute indique que le parachutiste atteint la vitesse de 200 $km{\cdot}h^{-1}$ en moins de quarante secondes.

(b) Convertir 200 $\text{km}{\cdot}\text{h}^{-1}$ en mètre par seconde $\left(\text{en m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$.

(c) Valider ou infirmer l'indication de la brochure.