# Quatrième entrainement

## Exercice 1

### Question 1

1. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2025) = 4\ln(3) + 2\ln(5).$$

2. Simplifier le nombre $A$ ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 2\ln\left(\mathrm{e}^4\right) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

### Question 2

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{-1+\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}.$$

1. Mettre $z$ sous forme algébrique. Détailler les calculs.
2. Donner le conjugué de $z$.

### Question 3

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x).$$

1. Déterminer la limite de $g$ en 0.
2. On admet que $g$ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note $g'$ sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

3. Montrer que la fonction $g$ admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

### Question 4

On considère l'équation suivante :

$$(E): \quad 2y' + y = 0,$$

où $y$ est une fonction de la variable $x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y'$ la fonction dérivée de $y$.

1. Montrer que les fonctions de la forme $f(x) = Ke^{-0.5x}$ sont solutions de l'équation.
2. La fonction $f$ passe par le point de coordonnées $A(0;11)$. Déterminer $K$ puis l'expression de $f$.

### Question 5

$g$ est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
On admet que la dérivée de $g$ est la fonction $g'$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g'(t) = 6e^{-t}(1-t).$$

1. Étudier le signe de $g'(t)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire les variations de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**Question 6**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + b\mathrm{e}^{x}$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 - 8x - 4$.

1. On admet que les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point en commun, noté A d'abscisse 0.
   Calculer $g(0)$, puis en déduire que $a + b = -4$.
2. On admet que les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont la même tangente $T$ au point A.
   (a) Donner, pour tout réel $x$, une expression de $g'(x)$ puis calculer $g'(0)$.
   (b) En déduire la valeur de $b$, puis celle de $a$.

**Exercice 2**

La température du lait, exprimée en degré Celsius, en fonction du temps $t$, exprimé en minute, est modélisée par la fonction $T$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$T(t) = 37 \times \mathrm{e}^{-\frac{20t}{459}} + 26,4.$$

1. Calculer $T(0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t)$.
   Selon ce modèle, quelle est la température de l'air de la pièce ? Justifier.
3. Selon ce modèle, au bout de combien de temps la température du lait vaut-elle $40°C$ ? Donner le résultat en minute et seconde.