Séquence : Calcul vectoriel et produit scalaire

I) Première définition du produit scalaire

Définition :
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\| \overrightarrow{u} \|$, est la distance AB.

Définition :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$; est le nombre réel défini par :

- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Remarque :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ alors :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$

Exemple :
Soient A, B et C trois points tels que : $AB = 6$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times cos(\widehat{BAC}) \\
&= 6 \times 4 \times cos(60°) \\
&= 6 \times 4 \times \frac{1}{2} \\
&= 12
\end{aligned}$$

II) Produit scalaire et orthogonalité

Propriété admise :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Remarque :
Par convention le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur.

Exemple :
Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) \\
&= \frac{1}{2} \times (3^2 + 4^2 - 5^2) \\
&= \frac{1}{2} \times (9 + 16 - 25) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On peut en déduire que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
Donc le triangle ABC est rectangle en B

III) Produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété admise :

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y'$$

Exemple :

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Déterminer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 2 + 7 \times 3 = 10 + 21 = 31$.

Propriétés admises :

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs .

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $x \times x' + y \times y' = 0$.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple :

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2. Déterminer $\|\vec{u}\|$.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 + (-6) \times 2 = 12 + (-12) = 0$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$.

Donc, $\|\vec{u}\| = \sqrt{52}$.