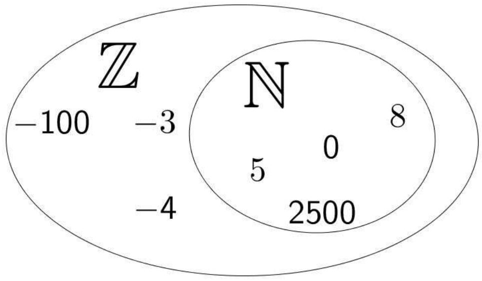
Séquence 1 : Ensembles de nombres - Équations - Inéquations

I) Ensembles de nombres

1) Nombres entiers naturels et Nombres entiers relatifs

Définitions :
- Un nombre entier naturel est un nombre entier positif (ou nul). L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.
- Un nombre entier relatif est un nombre entier positif ou négatif (ou nul). L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Exemples : $5 \in \mathbb{N}$ $\quad 5 \in \mathbb{Z}$ $\quad -3 \in \mathbb{Z}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$

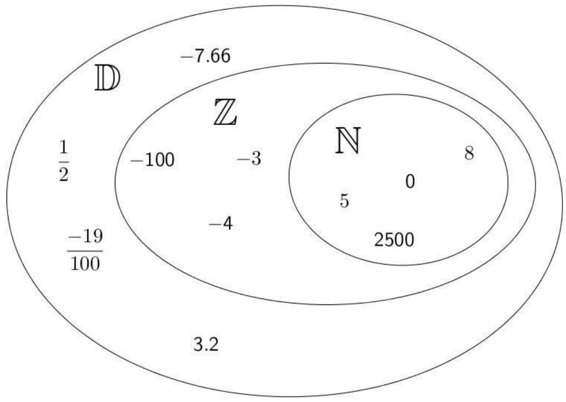


Remarque :
Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2) Nombres décimaux et nombres rationnels

Définition :
Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Remarque :
Les nombres entiers relatifs sont des nombres décimaux car $a = \dfrac{a}{10^0}$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

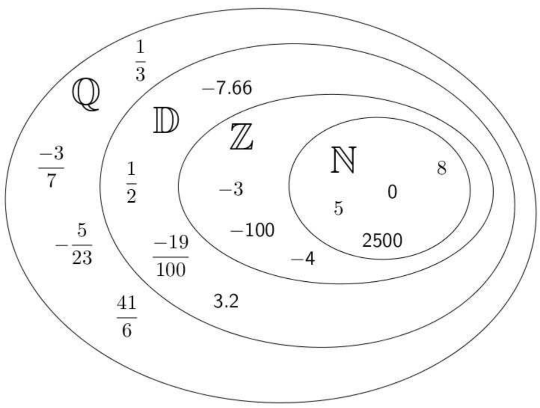


Propriété admise :
Un nombre est décimal si et seulement si il peut s'écrire $\dfrac{a}{2^m \times 5^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$.

Exemples : $\dfrac{7}{100} = \dfrac{7}{10^2} \in \mathbb{D}$ $\qquad \dfrac{1}{40} = \dfrac{1}{2^3 \times 5^1} \in \mathbb{D}$ $\qquad \dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Définition :
Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples : $\dfrac{1}{4} \in \mathbb{Q}$ $\qquad \dfrac{-9}{48} \in \mathbb{Q}$ $\qquad \dfrac{34}{11} \in \mathbb{Q}$

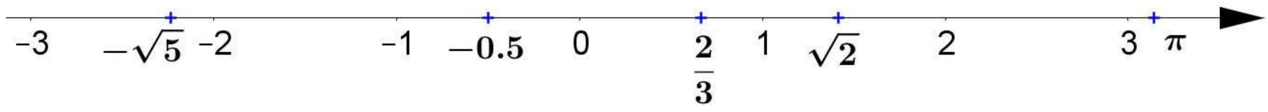


Remarques :
Tout nombre rationnel possède un développement décimal périodique illimité. Les nombres décimaux sont des nombres rationnels.
(En prenant b = 10^n avec $n \in \mathbb{N}$). Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

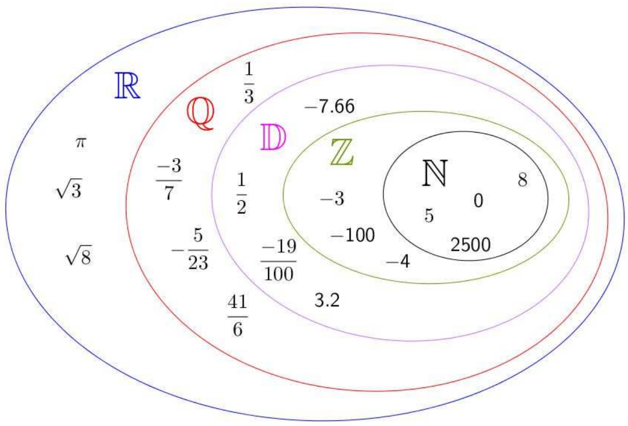
Propriété admise :
Tout nombre rationnel non nul admet une unique écriture fractionnaire irréductible $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ et tels que le seul diviseur positif commun à p et q soit 1.

Exemples : $\dfrac{3}{4}$ $\qquad \dfrac{26}{6} = \dfrac{13}{3}$ $\qquad \dfrac{34}{4} = \dfrac{17}{2}$

3) L'ensemble des nombres réels

> **Définition :**
> L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée, appelée droite numérique. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.
>
> 
>

Exemples : π , $\sqrt{7}$ sont des nombres réels.



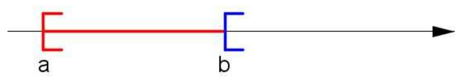
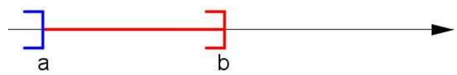
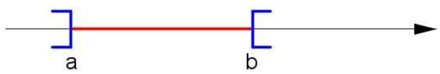
Remarque :
Les nombres rationnels sont des nombres réels.
Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Vocabulaire :
Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits nombres irrationnels. π , $\sqrt{2}$,par exemple, sont des nombres réels qui ne sont pas rationnels, ce sont donc des nombres irrationnels.

Notations :
On note $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ l'ensemble des nombres réels différents de 0.
On note $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ l'ensemble des nombres réels différents de 1 et 2.

II) Intervalle de $\mathbb{R}$

> **Définitions :**
> Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
> - L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
> - a et b s'appellent les bornes de l'intervalle $[a; b]$
> - L'amplitude de l'intervalle $[a; b]$ est $b - a$.
>
> 
>

Intervalle	Ensemble des réels x tels que ...	Signification	Représentation graphique
$[a\,;b[$	$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu.	
$]a\,;b]$	$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus.	
$]a\,;b[$	$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu.	

> **Définition :**
> Donner un encadrement décimal d'un réel x c'est donner deux nombres a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
> $b - a$ est appelée amplitude de l'encadrement.
> L'encadrement est à 10^{-n} près , $n \in \mathbb{Z}$ si son amplitude est égale à 10^{-n}.

Exemple : $3.14 \leqslant \pi \leqslant 3.15$ est un encadrement de π à 10^{-2} près (à 0.01 près).

Intervalle	Ensemble des réels x tels que ...	Signification	Représentation graphique
$[a\ ;+\infty[$	$x \geqslant a$	x est supérieur ou égal à a.	
$]-\infty\ ; a]$	$x \leqslant a$	x est inférieur ou égal à a	
$]a\ ;+\infty[$	$x > a$	x est strictement supérieur à a	
$]-\infty\ ; a[$	$x < a$	x est strictement inférieur à a	

Remarques :
Le crochet est toujours ouvert (dirigé vers l'extérieur) en $+\infty$ et $-\infty$.
L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty\ ;+\infty[$.
L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}^+$ ou $[0\ ;+\infty[$.
L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}^-$ ou $]-\infty\ ;0]$.

III) Résolutions d'équations et d'inéquations

1) Équations du premier degré

Définitions :

- Une équation est une égalité qui comporte au moins un nombre de valeur inconnue, généralement désigné par une lettre.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation c'est déterminer toutes les valeurs réelles de l'inconnue pour lesquelles l'égalité est vraie. Ces nombres constituent l'ensemble des solutions de l'équation.
- Deux équations sont dites équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

Propriétés admises :

- Une égalité reste vraie lorsque l'on ajoute (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres.
- Une égalité reste vraie lorsque l'on multiplie (ou divise) chacun de ses membres par un même nombre non nul.

Exemple :

$$\begin{aligned}
6x+2 &= -4x+32 \\
6x+2-2 &= -4x+32-2 \\
6x &= -4x+30 \\
6x+4x &= -4x+30+4x \\
10x &= 30 \\
\frac{10x}{10} &= \frac{30}{10} \\
x &= \frac{30}{10} \\
x &= 3
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est 3 . On note $\mathscr{S} = \{3\}$

2) Inéquations du premier degré

Définitions :

- Une inéquation est une inégalité qui comporte au moins un nombre de valeur inconnue, généralement désigné par une lettre. Cette inégalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.
- Une solution d'une inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation, c'est en trouver toutes les solutions réelles.

Propriétés admises :

- Une inégalité reste vraie lorsque l'on ajoute (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres.
- On peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inéquation par un même nombre non nul :
  $\rightarrow$ si ce nombre est positif, on ne change pas le sens de l'inégalité ;
  $\rightarrow$ si ce nombre est négatif, on change le sens de l'inégalité.

Exemple :

$$\begin{array}{rcll}
-8x+3 & > & -2x+15 & \\
-8x+3-3 & > & -2x+15-3 & \text{On soustrait 3 de part et d'autre.} \\
-8x & > & -2x+12 & \\
-8x+2x & > & -2x+12+2x & \text{On ajoute } 2x \text{ de part et d'autre.} \\
-6x & > & 12 & \\
\dfrac{-6x}{-6} & < & \dfrac{12}{-6} & \text{On divise par } -6\text{, on change donc le sens de l'inégalité.} \\
x & < & \dfrac{12}{-6} & \\
x & < & -2 &
\end{array}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} =]-\infty ; -2]$.