Séquence 1 : Suites numériques

I) Suites arithmétiques

1) Rappels

Définition :
Soit u_0 un réel. Une suite (u_n) de premier terme u_0 est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$ est une suite arithmétique de raison 5. Voici le programme Python qui détermine la valeur d'un terme de suite pour un rang choisi par l'utilisateur.

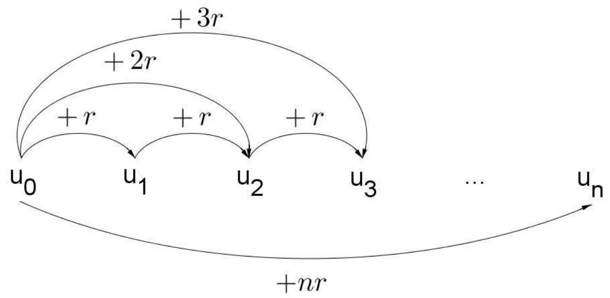
```
def suitarithrec(n) :
    u = 6
    for i in range (n):
        u = u + 5
    return u
```

2) Formule explicite d'une suite arithmétique.

Propriété admise :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Illustration :



Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, on a :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

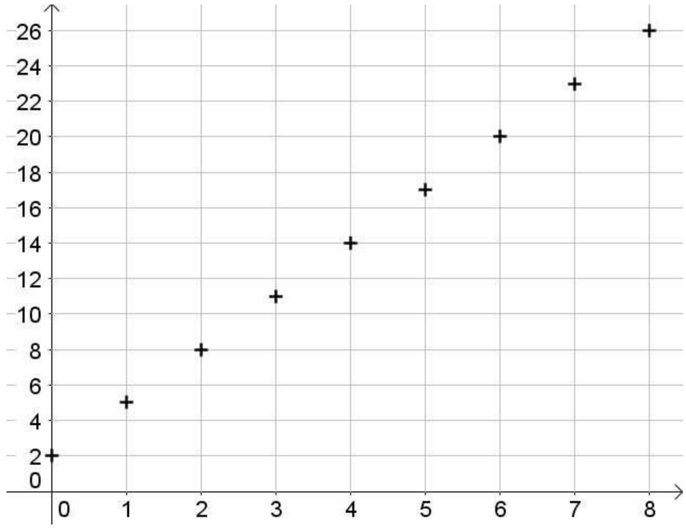
Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.
Exprimer u_n en fonction de n.

$u_n = u_0 + nr = 2 + n \times 3 = 2 + 3n$

Représentations de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	5	8	11	14	17	20	23	26

```python
def suitearith(n) :
    u = 2 + 3*n
    return u
```



Remarque :
On dit qu'un phénomène, dont l'évolution est représentée par une suite de nombres, est à croissance linéaire si la suite qui le modélise est une suite arithmétique.

3) Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique.

Notation :
On peut noter $u_0 + u_1 + ... + u_n$ sous la forme : $\sum_{k=0}^{n} u_k$

Propriété :
Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, la somme S des $n+1$ premiers termes est :

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Plus généralement , on a :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$.
Déterminer la somme des 17 premiers termes.

Étape 1 : Identification du premier terme :

Le premier terme est égal à 5.

Étape 2 : Déterminons la valeur du dernier terme u_{16} :

$u_{16} = u_0 + r \times 16 = 5 + 2 \times 16 = 37$

Étape 3 : Identification du nombre de termes :

On veut calculer la somme de 17 termes.

Étape 4 : Calcul de la somme :

$$S = 17 \times \frac{5+37}{2} = 357$$

La somme des 17 premiers termes de la suite (u_n) est égale à 357.

Voici un exemple de programme Python pour calculer cette somme.

```
def sommearithm(n) :
    u = 5
    S = 0
    for i in range(n) :
        S = S + u
        u = u + 2
    return S
```

Conséquence :
La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est :

$$S = 1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple :
Déterminer la somme des 35 premiers entiers.

Étape 1 : Identification du premier terme :

Le premier terme est égal à 1.

Étape 2 : Identification du dernier terme :

Le dernier terme est égale à 35.

Étape 3 : Identification du nombre de termes :

On veut calculer la somme de 35 termes.

Étape 4 : Calcul de la somme :

$$S = 35 \times \frac{1+35}{2} = 35 \times \frac{36}{2} = 630$$

La somme des 35 premiers entiers est égale à 630.

II) Suites géométriques

1) Rappels

Définition :
Soit u_0 un réel. Une suite (u_n) de premier terme u_0 est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 8u_n$ est une suite géométrique de raison 8.
Voici le programme Python qui détermine la valeur d'un terme de suite pour un rang choisi par l'utilisateur.

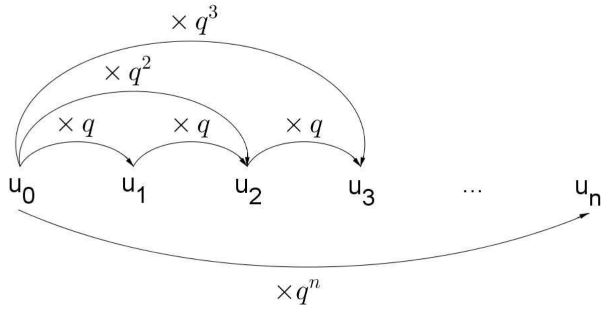
```
def suitgeomrec(n) :
    u = 2
    for i in range (n):
        u = u * 8
    return u
```

2) Formule explicite d'une suite géométrique.

Propriété admise :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Illustration :



Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

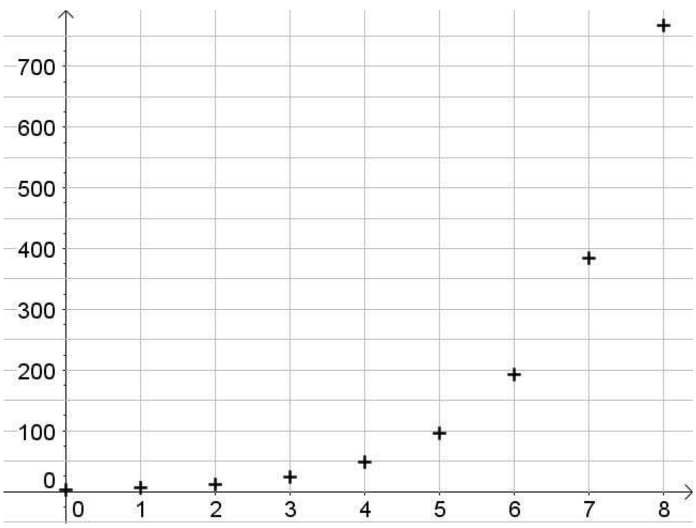
Exemple :
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Exprimer u_n en fonction de n.

$u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

Représentations de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	3	6	12	24	48	96	192	384	768

```
def suitegeom(n) :
    u = 3 * 2**n
    return u
```



Remarque :
On dit qu'un phénomène, dont l'évolution est représentée par une suite de nombres, est à croissance exponentielle si la suite qui le modélise est une suite géométrique.

3) Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Propriété :
Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, la somme S des $n+1$ premiers termes est :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement , on a :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - raison^{\text{nombre de termes}}}{1 - raison}$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 2$.
Déterminer la somme des 11 premiers termes.

Étape 1 : Identification du premier terme :

Le premier terme est égal à 8.

Étape 2 : Identification de la raison :

Le raison est égale à 2.

Étape 3 : Identification du nombre de termes :

Il y a 11 termes.

Étape 4 : Calcul de la somme :

$$S = 8 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = 16376$$

La somme des 11 premiers termes de la suite (u_n) est égale à 16376.

Voici un exemple de programme Python pour calculer cette somme.

```
def sommegeom(n) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(n) :
        S = S + u
        u = u * 2
    return S
```

Conséquence :

$$S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple :
Déterminer $S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^7$.

Calcul de la somme :

$$S = \frac{1-3^8}{1-3} = 3280$$

La somme S est égale à 3280.

III) Algorithme de seuil

Dans le cadre des suites, il n'est pas rare d'utiliser des algorithmes de seuil pour résoudre un exercice en particulier des inéquations.

Voici deux exemples :

Exemple 1 :

On considère une suite arithmétique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 2 + 6n$.
Déterminer le rang n à partir duquel $U_n > 20$.

Pour répondre à cette question on peut utiliser l'algorithme de seuil suivant :

```
def algoseuil():
    n = 0
    while 2 + 6*n <= 20 :
        n = n + 1
    return n
```

Le programme retourne $n = 4$. A partir de $n = 4$, $U_n > 20$.

Exemple 2 :

On considère une suite géométrique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 2000 \times (0.7)^n$.
Déterminer le rang n à partir duquel $U_n \leqslant 10$.

Pour répondre à cette question on peut utiliser l'algorithme de seuil suivant :

```
def algoseuil2():
    n = 0
    while 2000*0.7**n > 10 :
        n = n + 1
    return n
```

Le programme retourne $n = 15$. A partir de $n = 15$, $U_n \leqslant 10$.